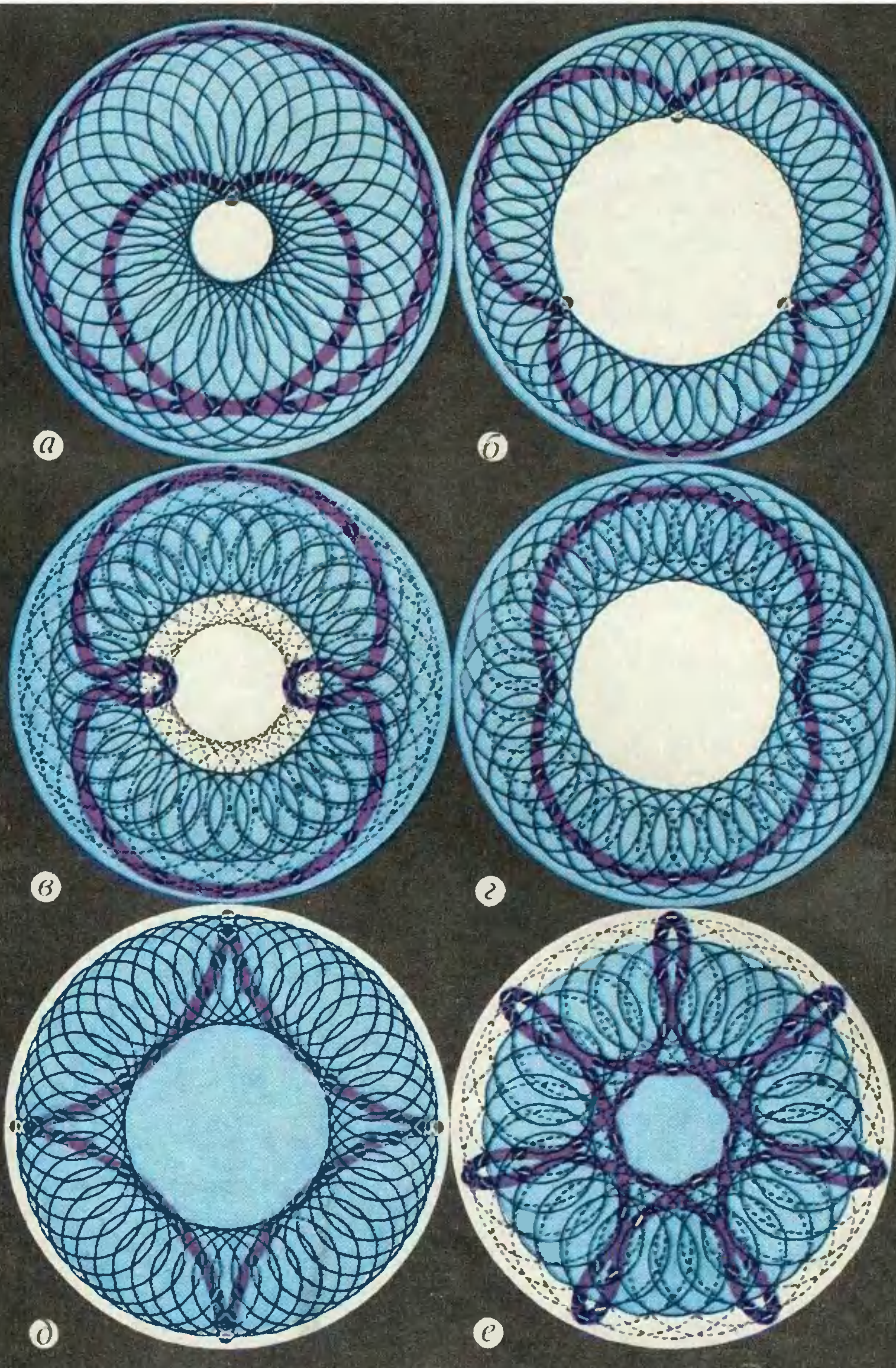
ISSN 0130-2221

Квант

6
1985

Научно-популярный физико-математический журнал
Академии наук СССР и Академии педагогических наук СССР



Фиолетовые кривые, показанные на рисунках а и б, называются эпициклоидами — их вычерчивает точка подвижной окружности, когда эта окружность катится по внутренней стороне неподвижной окружности. Об этих кривых, а также об удлиненной и укороченной эпициклоиде, гипоциклоиде и удлиненной гипоциклоиде (рисунки в, г, д и е соответственно) рассказано в статье С. Г. Гиндикина в этом номере журнала.

Научно-популярный физико-математический журнал Академии наук СССР и Академии педагогических наук СССР

Квант

6 1985

Основан в 1970 году

Издательство «Наука». Главная редакция физико-математической литературы

В НОМЕРЕ: / **IN THIS ISSUE:**

Известно, что наэлектризовать тело можно разными способами. Можно передать ему часть «чужого» заряда (именно так наэлектризовали листочки «султанчика», который вы видите на первой странице обложки). Есть и другой способ — электризация трением. О нем рассказывается в этом номере журнала (см. с. 16).

Что мы видим?
(о видимой форме быстро движущихся предметов)

Доктор физико-математических наук
Б. М. БОЛОТОВСКИЙ

Введение

Есть поговорка: «Лучше один раз увидеть, чем сто раз услышать». Смысл этой поговорки вполне ясен: говорить можно все, что угодно, но для того чтобы убедиться в сказанном, нужно все увидеть своими глазами. Глаза не обманут.

Однако всегда ли можно доверять своим глазам? Оказывается, не всегда. Иногда мы видим то, чего нет на самом деле. Не подумайте, что речь идет о галлюцинациях или дефектах зрения. Наблюдатель, находящийся в здравом уме и обладающий хорошим зрением, при определенных условиях может увидеть очень искаженную картину явления, весьма далекую от того, что происходит в действительности. И причина этого заключается не в том, что чувства могут изменить человеку. Поставим вместо наблюдателя кинокамеру, уж ее-то «показания» можно считать объективными. И все же, просмотрев заснятый фильм, мы увидим то же самое, что и наблюдатель, которому мы выразили недоверие и которого заменили кинокамерой.

И то, что мы увидим на экране, и то, что увидел наблюдатель, совсем не то, что происходит на самом деле.

Как это может быть?

Мы на нескольких примерах покажем, как это может быть. Ничего таинственного в наших примерах вы не найдете. Они говорят лишь о том, что нужно обдумывать каждое физическое наблюдение, стараться понять, о чем говорят показания приборов, и по этим показаниям восстанавливать реальную картину явления.

Фотографирование света на лету

Около пятнадцати лет назад американский физик Мишель Дюге сконструировал фотографический затвор, который срабатывал за необычайно короткие времена. Зачем нужны такие затворы?

Если мы фотографируем неподвижную картину, то промежуток времени, в течение которого затвор открыт — этот промежуток называется временем экспозиции,— не влияет на резкость изображения. Объект съемки неподвижен, изображение объекта на пленке также неподвижно, поэтому увеличение времени экспозиции не уменьшает резкости изображения. Иное дело, если объект съемки движется. Тогда движение и изображение объекта на пленке. В этом случае чем меньше время экспозиции, тем резче будет изображение предмета на фотографии. И наоборот, чем больше время экспозиции, тем больше «размажется» изображение предмета.

На некоторых фотографиях (обычно это фотографии бегущих людей или быстро мчащихся автомашин) нерезкость изображения уместна — она как бы подчеркивает стремительность движения. Но, как правило, чем быстрее движется объект съемки, тем меньше должно быть время экспозиции, тем на меньшее время открывается затвор. (В наших рассуждениях мы не учитываем, что фотографическая пленка обладает определенной чувствительностью и что меньшим временам экспозиции должна соответствовать большая чувствительность. Будем считать, что чувствительность пленки можно подобрать так, чтобы она соответствовала нужному времени экспозиции.)

Вернемся теперь к началу нашего повествования. Был создан фотографический затвор с временем экспозиции фантастически малым — около 10^{-11} с. Конечно, «фантастически» малым это время можно было считать только до создания затвора. Когда же он создан — это уже никакая не фантастика, а реальное замечательное достижение. Но... где его применить?

Такой «молниеносный» затвор можно было бы использовать для фотографирования объектов, движущихся со скоростями, близкими к скорости

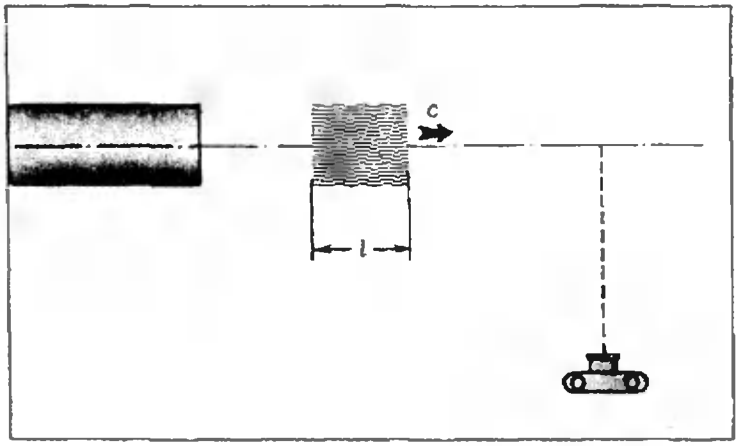


Рис. 1. При такой постановке опыта сфотографировать импульс нельзя — световые волны, составляющие пакет, не попадают в объектив.

света,— изображение на пленке получилось бы достаточно резким. Но где разыскать такие объекты? Они должны быть достаточно велики, для того чтобы получиться на фотографии,— скажем, иметь размер порядка сантиметра. Но сообщить материальному телу таких размеров скорость, близкую к скорости света, мы пока не можем — это требует огромных затрат энергии. (Например, чтобы разогнать тело массой в 1 г до скорости, равной половине скорости света, нужно затратить энергию порядка 10^{11} Дж. Такую энергию вырабатывает ежесекундно десяток современных атомных электростанций.) Максимальные скорости макроскопических тел, достигнутые в земных условиях, составляют величину порядка десятков километров в секунду. Мы умеем разгонять электроны до скоростей, которые близки к скорости света. Но ведь электрон непосредственно не сфотографируешь — он слишком мал. Нужен объект, который имел бы заметные размеры и двигался со световой скоростью. И Дюге, создатель затвора, нашел такой объект. Им оказался... сам свет.

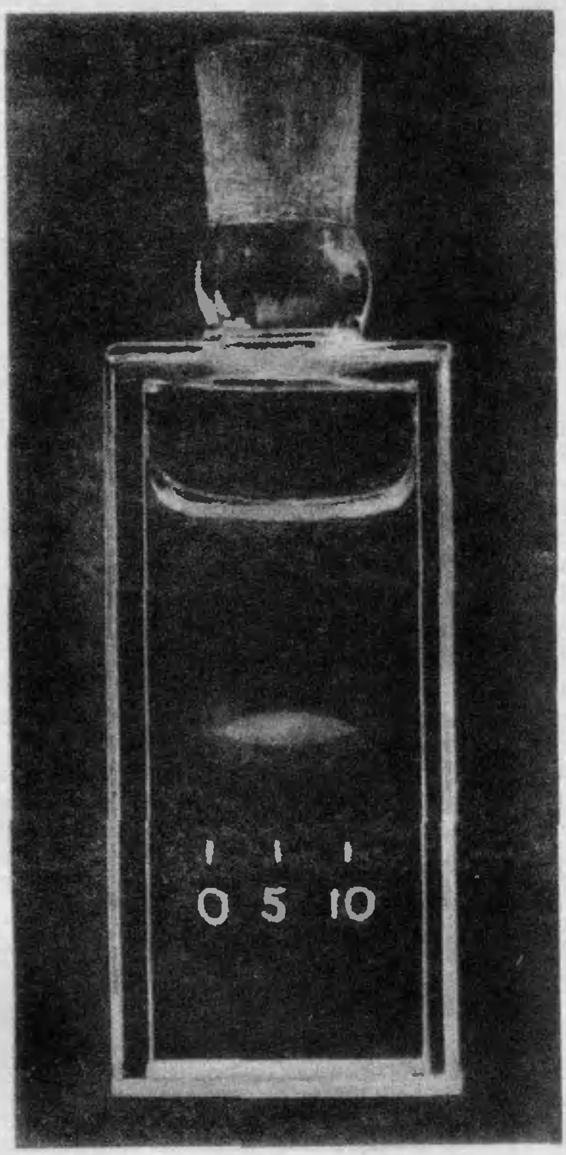
Источником света служил лазер, который давал излучение в виде очень кратковременных импульсов — длительностью примерно 10^{-11} с. Испущенный лазером световой импульс можно представить как некоторый объем, заполненный световыми волнами и движущийся в пространстве со скоростью света (рисунок 1). Такой объем называют волновым (или световым) пакетом. Длина пакета равна, очевидно, $l=c\tau$, где c — скорость света, а τ — время излучения, то есть длительность импульса; подставив $c=3\cdot10^5$ км/с, $\tau\approx10^{-11}$ с, мы получим $l\approx3$ мм. «Тело» таких размеров можно фотографировать.

Казалось бы, все просто — поместим фотоаппарат сбоку от пути светового «тела», наведем на какую-нибудь точку пути и в нужный момент спустим затвор. Такая постановка опыта изображена на рисунке 1. Однако если мы так сделаем, то ничего не увидим на пленке. Почему? Потому что изображение появляется на пленке лишь в том случае, если на нее попадает свет от движущегося тела. Это может быть «собственный» свет, если тело само излучает (так, например, происходит при фотографировании горящей лампочки). Если тело само не светится, его надо осветить, и тогда на пленку попадет отраженный или рассеянный телом свет от внешнего источника. Из рисунка 1 видно, что световые волны, составляющие пакет, распространяются по такому пути, что они никак не могут попасть в объектив фотоаппарата. Освещать такой пакет внешним источником тоже бесполезно — пакет не отражает и не рассеивает свет, световые волны от внешнего источника проходят через волновой пакет как через бесплотное привидение, не меняясь и не меняя пакета.

Выход был найден такой. На пути светового сгустка был помещен стеклянный сосуд с водой. В воду было добавлено несколько капель молока. От этой добавки вода стала немного мутной. Мутная среда рассеивает падающий на нее свет. Когда в такой сосуд с мутной водой попадает световой сгусток, составляющие его световые волны начинают рассеиваться и сгусток становится видимым. Теперь его можно фотографировать. Разумеется, вся установка для фотографирования должна помещаться в темной комнате, чтобы посторонние источники света не создавали помех.

С помощью такой установки были получены очень красивые фотографии летящего света. Одна из них воспроизводится на рисунке 2. Это — первая в истории науки фотография, полученная в «комнатных условиях» и изображающая объект, летящий со скоростью, близкой к скорости света (в воде скорость света приблизительно в полтора раза меньше, чем в пустоте). За время экспозиции световой сгусток в сосуде успел сдвинуться всего на 2,2 мм. Но изображение на фотографии «размазано» больше чем на 2,2 мм. Причина этого будет ясна из дальнейшего.

Рис. 2. Фотография светового импульса, движущегося в мутной (рассеивающей) среде. Время экспозиции 10^{-11} с.



После этого опыта М. Дюге проделал еще один чрезвычайно красивый эксперимент. Он создал световую «гантель» и сфотографировал ее.

Световая «гантель»

Прежде чем описывать результаты опыта по фотографированию световой «гантели», скажем несколько слов о том, зачем нужен такой опыт.

Согласно теории относительности длина тела, измеряемая в некоторой системе отсчета, зависит от того, с какой скоростью движется тело относительно этой системы отсчета. Если, в частности, тело покоится и его длина равна l_0, то при движении этого тела со скоростью v его длина будет $l=l_0\sqrt{1-v^2/c^2}$, где c — скорость света. Множитель $\sqrt{1-v^2/c^2}$ всегда меньше единицы, так что при движении тела его размеры в направлении движения (именно этот размер мы имели в виду, когда говорили «длина») сокращаются в $1/\sqrt{1-v^2/c^2}$ раз.* (Для скоростей, достижимых в земных условиях в настоящее время, множитель $\sqrt{1-v^2/c^2}$ очень мало отличается от единицы. Если тело имеет скорость 10 км/с (это по порядку величины скорость космических аппаратов — ракет и спутников), то этот множитель равен 0,99999999944, то есть отличается от единицы в десятом знаке после запятой. Следовательно, при достижимых ныне скоростях обнаружить сокращение размеров при движении чрезвычайно трудно. Но это утверждение теории относительности проверено на большом количестве вытекающих из него следствий.

Изменение размеров тел при движении приводит к изменению их формы. Движущийся шар, если скорость его движения близка к скорости света, должен сплющиваться и превращаться в «блин», плоскость которого перпендикулярна направлению скорости; куб должен превращаться в параллелепипед и т. п.

*) Такое сокращение часто называют «лоренцовым» — по имени нидерландского физика-теоретика Х. А. Лоренца, одним из первых (в 1892 году) предсказавшего этот эффект.

Поскольку в нашем распоряжении нет тел, движущихся с достаточно большой скоростью, непосредственно проверить изменение формы не представлялось возможным. Но теоретический анализ этого явления был проведен довольно подробно. И анализ показал, что дело не так просто, как кажется. Действительно, размеры шара в направлении движения сокращаются. Но заметить это сокращение, глядя на движущийся шар, наблюдатель не сможет. Ему помешает... сам способ наблюдения.

Чтобы понять, почему так получается, рассмотрим несколько примеров, имеющих отношение к затронутым вопросам. В летний день мы любуемся каким-нибудь ландшафтом. Светит Солнце, шелестят деревья, поют птицы. Мы все это воспринимаем одновременно.

Но в тот момент, когда мы слышим чириканье, птица может молчать. Звук в воздухе распространяется со скоростью более 300 м/с. Поэтому между временем исполнения птичьей трели и временем «приема» есть вполне измеримое запаздывание. Мы видим Солнце в некотором месте на небосводе. Но ведь свет от Солнца до Земли «идет» примерно восемь минут. Значит, мы не может утверждать, что сейчас, «сию минуту», Солнце находится именно там, где мы его видим.

Еще пример. Мы фотографируем звездное небо. О чем говорит сделанная нами фотография? Можно ли считать, что она отражает расположение звезд именно в тот момент, когда мы проводили съемку? Нет. Свет от удаленных звезд идет к Земле десятки, сотни и тысячи лет. Звезда, может быть, давно погасла, а мы не скоро узнаем об этом, свет от нее все еще идет, и мы видим эту звезду на фотографии. Звезда родилась, но свет от нее еще не дошел до нас,— и на фотографии этой звезды нет.

Все эти несоответствия имеют своей причиной одно и то же явление — конечную скорость распространения того сигнала, который доносит до нас сведения о состоянии объекта. Пока сигнал идет к нам, состояние объекта меняется. Если мы одновременно фотографируем несколько объектов, находящихся на разных расстояниях от камеры, то мы одновременно получаем информацию о положении этих тел. Но изображения всех тел на этой фотографии отражают положения этих тел в разные моменты времени. Эти моменты времени «сдвинуты» в прошлое по отношению к моменту съемки.

А теперь вернемся к вопросу о том, почему наблюдатель не сможет заметить лоренцова сокращения.

Все, что мы говорили о съемке нескольких объектов, относится и к одному объекту, имеющему определенные размеры. Если предмет неподвижен и время экспозиции достаточно для того, чтобы сигнал (свет) от самой удаленной точки предмета успел дойти до объектива, то мы можем с уверенностью сказать, что фотография точно отображает и положение предмета, и его размеры. Иное дело, если предмет движется.

Фотография движущегося тела дает нам сложную картину, на ней изображены разные точки тела в тех положениях, которые они занимали в разные моменты времени. Пусть, скажем, фотографируемое тело приближается к фотокамере. Тогда те точки тела, которые во время съемки больше удалены от объектива, будут казаться «отставшими» по сравнению с более близкими точками, так как на фотографии получатся изображения этих далеких точек, соответствующие более раннему моменту времени. Таким образом, на фотографии движущийся предмет окажется растянутым в направлении движения. Понятно, что такое мнимое «растяжение» будет особенно заметно, если скорость тела будет сравнима со скоростью света.

Расчеты показали, что мнимое растяжение будет компенсировать лоренцово сокращение. Так что наблюдатель не сможет заметить изменение формы быстро движущегося тела, и шар так и будет казаться ему шаром.*)

Как проверить справедливость всех этих рассуждений? Нужно сфотографировать движущееся тело, скорость которого была бы близка к скорости света,— в этом случае и сокращение

*) Попробуйте сами найти, как будет выглядеть на фотографии, сделанной с малым временем экспозиции, куб, пролетающий мимо объектива в направлении, перпендикулярном оптической оси. Проверить себя вы сможете, посмотрев решение задачи Ф827 в 10 номере «Кванта» за 1983 год.

длины в направлении движения, и запаздывание сигналов от разных точек тела будут наиболее заметны. Для этого Дюге с сотрудниками и создали «гантель» из света.

Для «приготовления» гантели достаточно разделить один световой пакет на две половинки, на два пакета. Затем эти половинки нужно развести в стороны так, чтобы получилось два летящих параллельно волновых пакета. Такие два пакета и составляют гантель.

«Приготовить» гантель можно, например, с помощью системы зеркал, изображенной на рисунке 3. Ось BB' гантели перпендикулярна линии AA' и делится этой линией пополам. Поворачивая всю систему зеркал вокруг оси AA', мы можем менять ориентацию гантели в вертикальной плоскости, перпендикулярной оси AA'. На рисунке 3 гантель изображена в вертикальном положении; повернув систему зеркал на 90° (в любом направлении относительно оси AA'), мы получим горизонтальную гантель, и т. п.

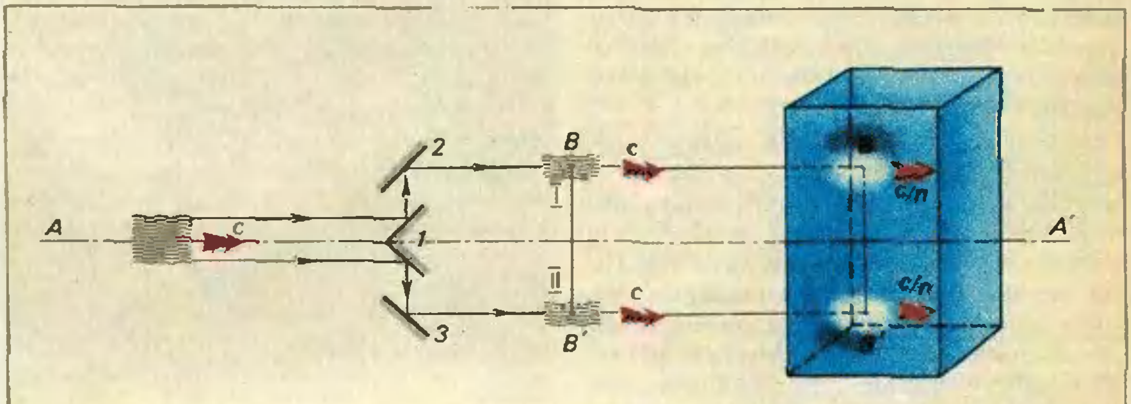
Готовая световая гантель направлялась в сосуд с мутной водой. Пакеты, составляющие гантель, влетали в сосуд одновременно и фотографировались.

На рисунке 4 представлены фотографии гантелей, по-разному повернутых относительно оси AA'. Снимок *а*) сделан с вертикально ориентированной гантели, и на фотографии гантель тоже вертикальна. Снимок *б*) сделан с гантели, которая была повернута от вертикального положения вокруг оси AA' на угол, примерно равный 30°. Снимок *в*) дает изображение гантели, повернутой относительно вертикального направления примерно на 60°. Наконец, снимок *г*) изображает гантель, расположенную горизонтально. На всех снимках световые пакеты, составляющие гантель, движутся слева направо, как и на рисунке 3.

Снимки эти удивительны. Пожалуй, только снимок *а*) оказался таким, как можно было предполагать. Два пакета, составляющие гантель, на этом снимке изображены один над другим. Так и должно быть, если фотографировать вертикально ориентированную гантель. Остальные снимки дают очень странную картину явления. Может быть, наиболее странным является снимок *г*), поэтому мы начнем с разбора именно этого снимка.

В самом деле, снимок сделан с гантели, которая была расположена в горизонтальной плоскости перпендикулярно линии AA' (то есть параллельно лучу зрения нашей фотокамеры), и по всем привычным нам законам на этом снимке должно быть одно светлое пятно, а не два — ведь в момент съемки более близкий к камере световой пакет загораживает более удаленный. А на снимке — два пакета, летящих друг за другом. Фотоаппарат «видит» гантель, ориенти-

Рис. 3. Уголковое зеркало 1 делит падающий на него световой пакет на две одинаковые части: половина пакета отражается по направлению к зеркалу 2, вторая половина — к зеркалу 3. Зеркала расположены так, что в конце концов мы получаем два расположенных рядом и летящих параллельно друг другу световых пакета. Эти пакеты, соединенные воображаемой линией BB', и образуют световую гантель. В среде с показателем преломления n гантель движется со скоростью c/n.



рованную параллельно скорости, а на самом деле гантель ориентирована перпендикулярно скорости.

Снимки *б*) и *в*) тоже неожиданны. Видно, что чем ближе положение оси гантели к горизонтальному, тем больше один пакет отстает от другого. А ведь мы по самой постановке опыта знаем, что оба пакета летят с одной и той же скоростью.

Все легко объясняется, если мы вспомним наши рассуждения о том, какую информацию можно извлечь из фотоснимка. Если на снимке изображены два предмета, из которых один был в момент съемки расположен ближе к фотоаппарату, чем другой, то изображение более далекого предмета соответствует более раннему моменту времени. Именно это мы и видим на фотографиях гантели (*б*) — *г*)): более удаленный от объектива пакет гантели изображен в более ранний по сравнению с ближайшим к объективу пакетом момент времени, когда он еще не достиг той точки, в которой его застал момент съемки. Поэтому изображение удаленного пакета на фотографии смещено назад по сравнению с изображением ближайшего пакета.

Теперь понятно, почему на фотографии светового пакета (см. рисунок 2) получилось сильно размазанное изображение: дополнительное «расплывание» связано с тем, что пакет имеет протяженность в направлении луча зрения фотокамеры.

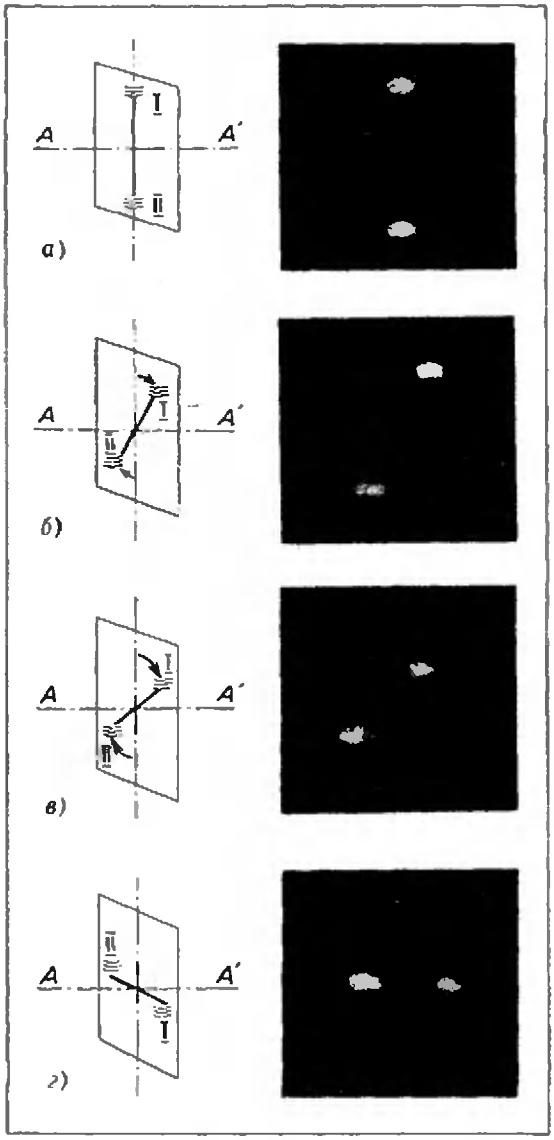


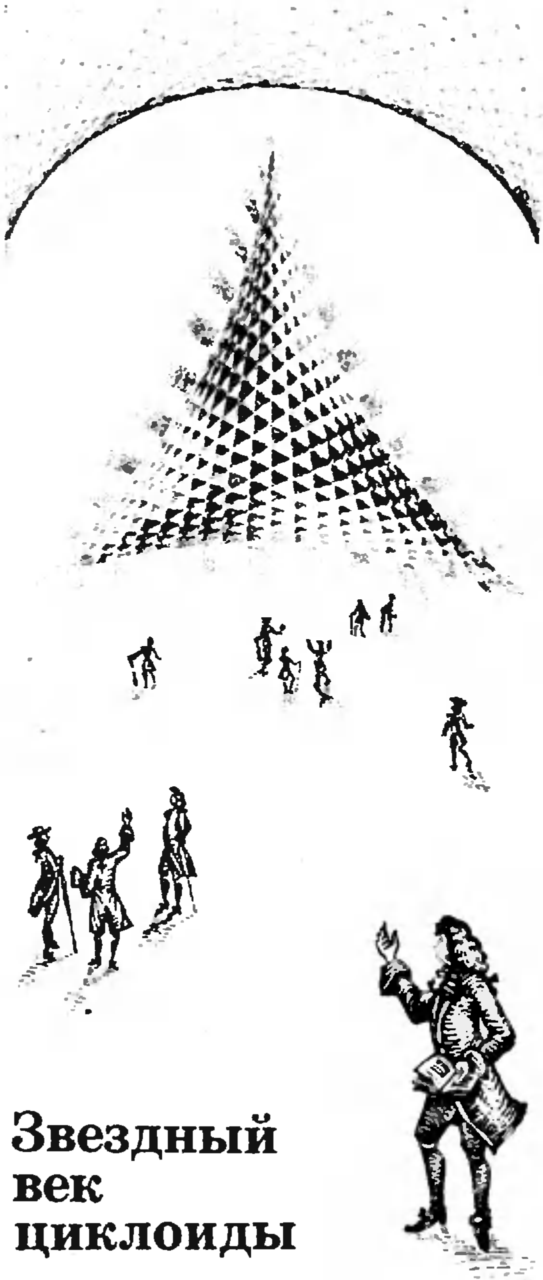
Рис. 4. Фотографии световых гантелей, по-разному ориентированных относительно «луча зрения» фотоаппарата. Время экспозиции 10^{-11} с.

Заключение

Итак, не всегда можно верить глазам своим. Глаз получает зрительную информацию с помощью световых волн. Фотоаппарат, по существу, повторяет устройство глаза. Испокон веку люди наблюдали только медленно движущиеся предметы. При этом, когда мы говорим о медленном движении, мы имеем в виду, что скорость мала по сравнению со скоростью света. В этом смысле самые быстрые земные движения являются медленными, и зрение дает правильное представление о форме предметов. Но если предметы движутся со скоростями, равными или близкими к скорости света, то наш глаз (и фотоаппарат) дает искаженную картину. Зная эту особенность нашего зрения, мы всегда можем внести необходимые поправки и восстановить истину. Нужно только с должной осторожностью относиться к показаниям наших чувств.

* * *

Тому, кто захочет подробнее ознакомиться с устройством замечательного затвора Дюге и деталями эксперимента по фотографированию светового импульса, советуем прочитать статью Н. Н. Малова «Как сфотографировали свет», которая была опубликована в 10 номере «Кванта» за 1974 год.



Звездный век циклоиды

Кандидат физико-математических наук
С. Г. ГИНДИКИН

Циклоида сыграла беспрецедентную роль в истории математики XVII века, героического века анализа бесконечно малых. Быть может, наиболее красноречивые следы этого сохранились вдалеке от математики — в художественной литературе. В третьей части «Путешествий Гулливера» Джонатан Свифт рассказывает, как Гулливер попадает на летающий остров Лапуту и король, покровительствовавший науке и музыке, угощает его изысканным обедом. За бараньей лопаткой, вырезанной в форме равностороннего треугольника, и куском говядины в форме ромба последовал пудинг в форме циклоиды. Вероятно, в начале XVIII века трудно было представить себе более изощренную форму!

Лет через тридцать циклоида появляется на страницах «Жизни и мнений Тристрама Шенди, джентльмена», бессмертного романа Лоренса Стерна. Чудаковатый добряк Тоби Шенди, собираясь построить мост, который должен стать чудом фортификационного искусства, решает придать ему форму циклоиды: «...он переменил решение в пользу моста, изобретенного маркизом де Лопиталем, который так обстоятельно и научно описан Бернулли-младшим, как ваши милости могут убедиться в Acta Erud. Lips, an. 1695; такие мосты удерживаются в устойчивом равновесии свинцовым грузом, который их охраняет не хуже двух часовых, если мост выведен в форме кривой линии, как можно больше приближающейся к циклоиде».

К Лопиталю, Бернулли и к научному журналу Acta Eruditorium мы еще вернемся, а пока выясним, что могли знать о циклоиде современники Тоби Шенди, жившие в середине XVIII века.

Авторитетным источником информации является «История рулетты, называемой также трохоидой или циклоидой», датированная еще октябрем 1658 года и подписанная Амосом Деттонвиллем; как мы увидим, это псевдоним французского математика, физика и мыслителя Блеза Паскаля (1623—1662). Он пишет: «Рулетта является линией столь обычной, что после прямой и окружности нет более часто встречающейся линии; она так часто вычерчивается перед глазами каждого, что надо удивляться тому, как не рассмотрели ее древние... ибо это не что иное, как путь колеса, когда оно катится своим движением с того момента, как гвоздь начал подниматься с земли, до того, когда непрерывное качение колеса не приводит его опять к земле после окончания целого оборота, считая, что колесо — идеальный круг, гвоздь — точка его окружности, а земля — идеально плоская». В этом тексте содержится определение циклоиды: это

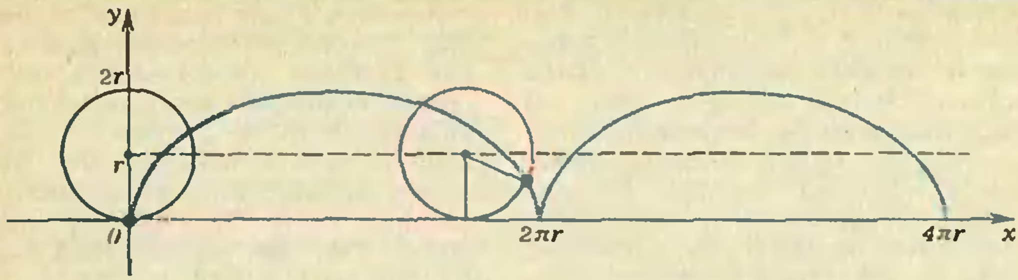


Рис. 1.

траектория точки окружности, которая катится без скольжения по прямой. Точка, поднимаясь с нижнего положения, описывает симметричную выпуклую арку, причем при каждом обороте получается новая арка; в точке соприкосновения арок имеется острие (рис. 1).

Термин «циклоида» (происходящая от круга) принадлежит Галилею (1564—1642), который, по-видимому, первый рассмотрел ее. «Рулетта» — французский термин (от глагола rouler — катать), «трохоида» — его греческий эквивалент. Разнобой в терминологии отражает энергичную франко-итальянскую дискуссию о приоритете в открытии циклоиды: Паскаль утверждает, что Марен Мерсенн (1588—1648) рассмотрел ее уже в 1615 году, раньше Галилея.

Эпициклоиды в системе Птолемея

Достойно внимания удивление Паскаля по поводу того, что циклоиду не рассмотрели древние. В чем причина этого? Дело в том, что для древних источником появления новых кривых были разнообразные задачи на геометрические места точек, а траектории криволинейных движений были за пределами интересов большинства математиков древности.

Лишь новая механика, начавшаяся в первые годы XVII века с работ Галилея о движениях, перестроила идеологию математиков, обратив их внимание на кривые механического происхождения, и знаменательно, что именно Галилей ввел в рассмотрение первую такую кривую — циклоиду.

Хотя древние не знали циклоиды, они знали и успешно пользовались ее близкой родственницей — эпициклоидой. *Эпициклоиды* (см. 2-ю с. обложки, *а*, *б*) получаются как траектории точек окружности, катящейся без скольжения по внешней стороне другой окружности (при качении по внутренней стороне получаются кривые, называемые *гипоциклоидами*; обл., *д*). Эпициклоиды встречаются в геоцентрической системе мира*) Птолемея (85?—165?). Еще Платон (427—347 до н. э.) и Аристотель (384—322 до н. э.) считали, что все планеты, а также Солнце и Луна, равномерно вращаются по окружностям с центром в Земле. Эта теория не только входила в противоречие с численными данными, полученными по составлении астрономических таблиц, но не объясняла ряд грубых качественных эффектов. Скажем, Марс, который, как правило, двигался по звездному небу против часовой стрелки, в окрестности противостояния начинал двигаться по часовой стрелке («попятное движение»). Это легко объяснить в рамках гелиоцентрической системы, но ученые древности, не сомневавшиеся в основном догмате геоцентрической системы, решили примирить ее с данными астрономических наблюдений. Аполлоний и вслед за ним Птолемей сохраняют аксиому о том, что в мире царит равномерное круговое движение, но полагают, что движение планет является сложным; планета движется по окружности, центр которой в свою очередь вращается по большой окружности с центром в Земле. Оказывается, что можно так подобрать скорости этих двух вращений, что траектории планет будут содержать петли, на которых будет происходить «попятное движение». Эти траектории не будут в точности эпициклоидами, но очень близкими кривыми. Если предположить, что по неподвижной окружности катится не окружность, а круг, то его граничные точки будут описывать эпициклоиды,

*) В геоцентрической системе мира Земля считается центром Вселенной, в отличие от гелиоцентрической системы Коперника, согласно которой планеты вращаются вокруг Солнца.

а внутренние точки описывают иные кривые, у которых острия сглаживаются и которые называются *укороченными эпициклоидами* (обл., *г*). А если мысленно расширить катящийся круг (не меняя неподвижного), скажем, «надеть» на него реборду, то внешние точки будут описывать *удлиненные эпициклоиды*, у которых острия превратятся в петли с «попятным» движением (обл., *в*).

Эта удивительная по остроумию конструкция не только смоделировала качественные эффекты типа «попятного движения», но и с различными модификациями позволила многие сотни лет учитывать все многочисленные данные астрономических наблюдений. Даже когда Николай Коперник (1473—1543) предложил гелиоцентрическую систему мира, ему очень нелегко было сделать свою систему конкурентноспособной с существующим тогда вариантом птолемеевой системы с точки зрения согласованности с данными наблюдательной астрономии.

Интересно, что и Коперник (как позднее и Галилей) не отказался от принципа, по которому в мире царит равномерное вращение и сохранил круговые орбиты (необходимость в них отпала лишь после появления эллиптических орбит Кéплера (1571—1630)). В частности, он хотел сконструировать прямолинейное движение из круговых (считалось, что по прямым движутся кометы). И он придумал способ! Пусть по внутренней стороне окружности радиуса 1 катится без скольжения окружность радиуса 1/2. Ее точки описывают некоторые вырожденные гипоциклоиды — диаметры неподвижной окружности: каждая точка колеблется взад-вперед по своему диаметру. Удивительно красивая картина, в которой приятно разобраться самому!

Циклоиду заметили

Мы не знаем в точности, когда Галилей заинтересовался циклоидой: было ли это уже в его молодости, в начале века, когда он открыл законы движения, или когда, через тридцать лет, борясь с наступающей слепотой, он писал «Беседы и математические доказательства, касающиеся двух новых отраслей науки, относящихся к механике и местному движению». Эта книга была призвана сохранить для потомков замечательные открытия Галилея по механике, остававшиеся неопубликованными. Галилей находился тогда в ссылке по приговору суда инквизиции. Жил он на вилле Арчетри близ Флоренции. Последние годы Галилея скрашивали два его ученика: совсем юный Винченцо Вивиани (1622—1647) и более умудренный опытом Эванджелиста Торричелли (1608—1647). Они помогли учителю в завершении его замыслов, но, чем дальше, тем больше им приходилось самостоятельно разрабатывать задачи Галилея, на которые у него не было сил.

Галилей ясно понимал, какие задачи про циклоиду естественно использовать в первую очередь: нужно построить касательные к кривой и найти площади ее сегментов и других связанных с ней криволинейных фигур. Первая из них относится, в современной терминологии, к дифференциальному исчислению, а вторая — к интегральному.

Касательная к циклоиде

В Италии касательную к циклоиде первым построил Вивиани, а затем Торричелли придумал очень изящную конструкцию этой касательной, основанную на сложении движений. Он вначале рассматривал параболу, по которой летит тело, брошенное горизонтально (или под углом). Это движение, следуя Галилею, получается сложением равномерного прямолинейного движения и равноускоренного свободного падения. Скорости этих движений известны и, складывая векторы скоростей по правилу параллелограмма, мы получаем вектор скорости движения, направленный по касательной к параболе (очень поучительно самостоятельно воспроизвести эту простую выкладку; напомним, что касательная к параболе $y=x^2$ через точку (x, x^2) соединяет эту точку с $(x/2, 0)$. Это рассуждение Торричелли. Удивительно, что его не провел (или не опубликовал?) Галилей.

Движение же по циклоиде складывается из равномерного движения вдоль горизонтали и равномерного вращения, причем величины скоростей этих движений равны (условие отсутствия скольжения). Складывая горизонтальные вектор скорости в точке циклоиды с вращательным вектором (касающимся производящего круга и имеющим ту же длину), получаем, что касательная к циклоиде проходит через верхнюю точку круга в соответствующем положении (проделайте это построение на рисунке 1).

Аналогичное рассуждение (возможно, несколько раньше) придумал француз Жиль Персонн, по прозвищу Роберваль (1602—1675). Заслуга Роберваля заключалась в том, что он не ограничился рассмотрением циклоиды, а разработал общую технику проведения касательных при помощи представления кривых в виде траекторий сложных движений. Его метод был по началу вполне конкурентноспособен в сравнении с другими способами проведения касательных, имеющимися в это время.

И все же будущее принадлежало более прямым методам, разрабатывавшимся Пьером Ферма (1601—1665) и Рене Декартом (1596—1650). Эти методы не требовали «индивидуального подхода» к каждой кривой (например, подбора составляющих движений). А позволяют ли эти методы провести касательную к циклоиде — кривой механического происхождения?

Выяснилось, что методом Ферма касательная строится без всяких затруднений, а вот метод Декарта, ориентированный на рассмотрение кривых, заданных многочленами, отказал. Но не таков Декарт, чтобы дать повод утверждать, что он не справился с задачей, доступной его коллегам. Он придумывает удивительную по красоте механическую теорию. В модернизированном варианте речь идет о том, что при образовании циклоиды мы рассматриваем не движение изолированной материальной точки, а движение твердой пластины — катящегося круга. При этом в каждый момент времени движение, как правило, мало отличается от поворота пластины около некоторого (мгновенного) центра вращения. Скорости во всех точках перпендикулярны радиусу из мгновенного центра вращения. В случае циклоиды, как легко понять, мгновенный центр вращения — это не центр катящегося круга, а его точка касания с направляющей прямой. Отсюда немедленно следует сформулированное выше правило проведения касательной (ведь вписанный прямой угол опирается на диаметр).

Площадь и «спутница» циклоиды

Покончим с касательными и перейдем к площадям. В случае циклоиды французские математики рассмотрели эти задачи даже раньше, чем задачу о касательных (возможно, причиной была бóльшая уверенность в задачах о площадях). Прежде всего речь идет о вычислении площади сегмента под полной аркой циклоиды. Вивиани и Торичелли утверждают, что Галилей знал, что площадь этого сегмента равна утроенной площади производящего круга. Роберваль доказал эту теорему в 1634 году. Несколько слов об очень красивом рассуждении Роберваля. В каждый момент времени Роберваль проецирует наблюдаемую точку циклоиды на вертикальный диаметр катящегося круга и следит, как перемещается эта проекция. Получается новая кривая, которую Роберваль назвал «спутницей циклоиды» (рис. 2) А потом выяснилось, что эта очень симметричная кривая является ...сдвинутой синусоидой! Именно так (а не как график синуса) впервые появилась в математике синусоида. Площадь под синусоидой считается легко: если разрезать ее средними горизонтальной и вертикальной линиями, то получаются части, из которых составляется прямоугольник со сторонами $2\pi r$ и r (см. рис. 2, где $r=1$), то есть площадь равна $2\pi r^2$. Что касается двух оставшихся фигур (их назвали *лепестками Роберваля*), то они как нельзя лучше иллюстрировали очень популярный в те годы прием вычисления площадей — принцип Бонавентуры Кавальери (1598—1647). Он состоит в том, что если две фигуры при пересечении любыми горизонталями дают отрезки равной длины,

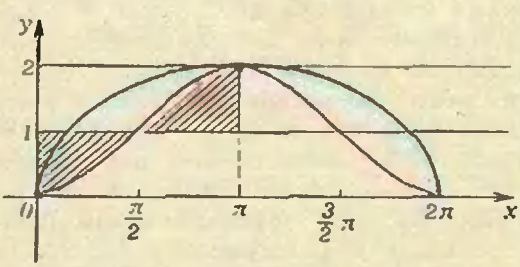


Рис. 2.

то они имеют одинаковые площади. Кавальери мыслил себе фигуры состоящими из «неделимых» — параллельных слоев нулевой толщины — и утверждал, что при взаимных сдвигах слоев площадь не меняется. Лепестки Роберваля имеют те же пересечения с горизонталями, что и отсекаемая вертикальным диаметром половина катящегося круга, значит, по принципу Кавальери их общая площадь равна площади πr^2 этого круга, а общая площадь под аркой циклоиды равна $3\pi r^2$. Не правда ли, очень остроумное рассуждение!

Задачи Мерсенна и конкурс Паскаля

На этом кончается первый этап «жизни» циклоиды. Первые связанные с ней задачи решились очень красиво, и циклоида прочно заняла место в поле зрения крупнейших ученых. Но оставались нерешенными задачи, которые естественно было поставить в рамках развивающегося анализа бесконечно малых. Пропагандистом новых задач (в случае про циклоиды) был Мерсенн, которого мы уже упоминали. О нем и его своеобразной роли в истории науки стоит сказать еще несколько слов. У францисканского монаха Мерсенна были собственные достижения и в математике и в физике (например, он довольно точно измерил скорость звука), но много выше его заслуги как организатора науки. В то время, когда еще не было научных журналов, почти все научные связи осуществлялись через Мерсенна: он был своеобразным «почтовым ящиком». Ученые из разных стран сообщали ему о полученных результатах, понимая, что он оперативно даст знать о них заинтересованным коллегам и конкурентам (а авторитет Мерсенна был гарантией сохранения приоритета). Мерсенн следил за актуальными задачами, передавал их тем ученым, которым было естественно ими заниматься. С 1639 года начались «мерсенновские четверги», которые посещали Этьен и Блез Паскали (отец и сын), Дезарг, Мидорж, Роберваль, словом все серьезные ученые, находившиеся в тот год в Париже. Эти «четверги» были предвестником Французской Академии наук. На примере Христиана Гюйгенса (1629—1695), с которым Мерсенн переписывался с 1646 года, видно, как заботился Мерсенн о становлении молодого таланта. Он начинает с учебных задач, переходит к нерешенным, предвещает, что его юный корреспондент станет «Аполлонием и Архимедом ... грядущего века», и, наконец, ставит задачу (обещая премию за решение) о приведенной длине физического маятника, которую Гюйгенс сможет решить лишь через несколько десятилетий, не прекращая все это время думать над ней.

Что касается циклоиды, то Мерсенн считал, что не следует ограничиваться вычислением площади полного сегмента циклоиды, а надо рассмотреть сегменты, отсекаемые различными горизонталями, нужно найти центры тяжести этих сегментов, объемы тел вращения, ими образованных, и т. д. Мерсенн, вероятно, правильно оценивал то, что в этих задачах элементарные манипуляции с «неделимыми слоями» Кавальери не ведут к цели (нужно сосчитать интеграл от синуса в общем виде). Поэтому Мерсенн нацеливал на эти задачи самого многообещающего и оригинального из своих коллег — Блеза Паскаля.

Паскаль, однако, занялся этими задачами лишь весной 1658 года, когда он находился в монастыре Пор-Рояль после тяжелых потрясений и когда казалось, что он окончательно разочаровался в математике и уже никогда не вернется к ней. Сохранились рассказы его сестры Жильберты Перье и племянницы Маргариты о последнем контакте Паскаля с математикой. Он вспомнил о задачах Мерсенна, когда не мог уснуть из-за жесточайшей зубной боли. Размышления над циклоидой отвлекали от боли и постепенно захватили Паскаля. К утру он знал решение давно не поддававшейся задачи и... совершенно исцелился от зубной боли. Паскаль не собирался записывать полученный результат, но его друг герцог де Роанне уговорил его сделать это, успокоив тем, что возвращение к математике было вызвано «внушением свыше». Герцог выделил 60 пистолей для организации конкурса на решение задач Мерсенна.

В июне 1658 года рассылается циркулярное письмо крупнейшим геометрам Европы с предложением решить шесть задач о циклоиде. Срок конкурса — 1 октября — предельно краток. Письмо подписано псевдонимом «Амос Деттонвилль»,— это анаграмма псевдонима Паскаля «Луи де Монтальт», под которым в это время выходили его «Письма к провинциалу». 7—9 октября было сообщено о закрытии конкурса, 24 октября были подведены итоги. Мерсенн не дожил до решения своих задач. Его функции «почтового ящика» перенял Пьер Каркави (1603—1684), который и возглавил вместе с Робервалем жюри. На призыв Деттонвилля откликнулись крупнейшие математики: Джон Валлис (1616—1703) решил все задачи, но к его решениям были претензии, Гюйгенс решил четыре задачи. А жюри присудило приз Деттонвиллю, который использовал премиальные средства на публикацию решений. «Работа выполнена столь тонко, что к ней ничего нельзя прибавить»,— писал Гюйгенс канонику де Слюзу, участнику конкурса, решившему одну задачу.

Конкурс Паскаля сыграл большую роль в научной жизни. Для грядущего анализа бесконечно малых было принципиально перейти от рассмотрения конкретных примеров к общим методам. Рассмотрения Паскаля практически не использовали специфики циклоиды и без затруднений могли быть перенесены на общую ситуацию. Однако Паскаль сам этого не сделал, а оценено это было задним числом, когда Лейбниц (1646—1716), который и разработал наряду с Ньютоном общие методы дифференциального и интегрального исчисления, обратился по рекомендации Гюйгенса к работе Паскаля. «Меня озарило новым светом»,— писал Лейбниц и удивлялся, что Паскаль не сформулировал общего приема, как будто «на его глазах была пелена». Трудно угадать, почему это произошло. Часто ученые не видят ходов, которые по прошествии некоторого времени кажутся естественными. Но опять-таки можно предположить, что Паскаля уже не волновали судьбы математики: он отдавал свои последние силы напряженным размышлениям о смысле жизни, о месте человека на Земле.

С конкурса Паскаля началась новая жизнь циклоиды. Участники конкурса не ограничились задачами, предложенными Паскалем. Например, Кристоффер Рен (1632—1723), талантливый английский математик, прославленный архитектор (создатель собора св. Павла в Лондоне), не достиг больших успехов в конкурсе, но сообщил теорему, которая произвела очень сильное впечатление на математиков. Он доказал, что длина одной арки циклоиды равна $8r$.

Часы с циклоидальным маятником

Другой участник конкурса 28-летний Гюйгенс отвлекся на решение задач про циклоиду от построения маятниковых часов, которому он с увлечением отдавал все свое время уже второй год. Первый экземпляр часов появился в середине 1658 года. С тех пор Гюйгенс был занят их усовершенствованием. Идея, лежащая в основе маятниковых часов, состоит в том, что период колебаний маятника — это постоянно воспроизводимая единица времени, которая в силу открытого Галилеем изохронного свойства маятника (независимость периода от амплитуды размаха) остается неизменной при затухании колебаний. Гюйгенс хотел создать морской хронометр, при помощи которого можно будет измерять долготу на борту корабля (по разности местных времен на борту и в порту отплытия; время отплытия и «помнит» хронометр). Проблема измерения долготы была проблемой века. Не удивительно, что ведущие морские державы назначали баснословные премии за достаточно надежный способ измерять долготу на борту.

Вскоре после того как стало известно об изобретении Гюйгенса, выяснилось, что Галилей обладал идеей маятниковых часов, но очередь до нее дошла лишь за год до смерти, когда уже не было сил для реализации. Не смог справиться с этой задачей и его сын Винченцо, которому было завещано завершение проекта.

Создавая первые часы, Гюйгенс обнаружил, что утверждение Галилея об изохронности колебаний математического маятника не точно. Оно справедливо лишь для малых углов размаха. А как же обеспечить изохронность? Гюйгенс понимает, что для этого надо уменьшать длину маятника по мере отклонения от вертикали. Но каков должен быть закон уменьшения длины подвеса? Для первых часов Гюйгенс эмпирически подбирает форму «щек», на которые частично наматывается нить подвеса по мере удаления от вертикали (рис. 3). Но он не может найти способа вычислить форму щек. Отчаявшись, он убирает щеки в конструкции 1658 года (поставив ограничитель амплитуды). Но через год щеки появились вновь,— теперь уже Гюйгенс знал точный закон изменения длины подвеса, при котором имеет место изохронность колебаний: в промежутке, как мы помним, он участвовал в конкурсе Паскаля!

Галилей ясно понимал, что задача о колебании математического маятника эквивалентна задаче о движении тяжелой материальной точки по круговому желобу (который совпадает с траекторией конца маятника). На точку, движущуюся по желобу, и конец маятника наложены одинаковые связи. Утверждение об изохронности эквивалентно тому, что, с какого бы места на желобе точка ни начинала движение, она окажется в нижней точке через один и тот же момент времени. Удивляться возможности существования такого эффекта не следует: если движение начинается на большей высоте, то точка проходит больший путь, но набирает по дороге большую скорость. Впрочем, как выяснил Гюйгенс, круговой желоб, в противоречии с мнением Галилея, свойством изохронности не обладает. И Гюйгенс ищет форму желоба, при которой время спуска не зависит от начальной точки. Такую кривую Гюйгенс назвал *таутохроной* (ее называют также *изохроной*). Оказалось, что таутохрона — это... перевернутая циклоида!

Но это еще не решает задачу до конца. Нужно придумать способ подвески (форму щек), при которой конец маятника будет двигаться по циклоиде. И опять совпадение: Гюйгенс ранее интересовался развертками кривых — траекториями точек нитей, наматываемых на криволинейные препятствия. Имевшийся опыт позволил ему выяснить, что для получения циклоидального маятника щекам надо придать также форму циклоид. При этом циклоида, отвечающая концу маятника, и циклоида щеки должны быть сдвинуты на полоборота. Длина маятника равна $4r$; когда он полностью наматывается, он оказывается

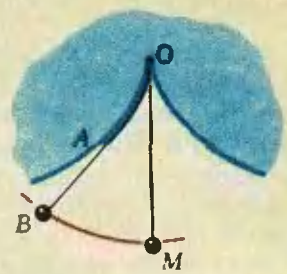


Рис. 3.

в нижней точке щеки. Отсюда мгновенно получается упомянутая выше теорема Рена: периметр щеки вдвое больше длины маятника.

Гюйгенс уверен в фундаментальности обнаруженных им свойств циклоиды: «...потребовалось укрепить и, где нужно, дополнить учение великого Галилея о падении тел. Наиболее желательным плодом, как бы величайшей вершиной этого учения, и является открытое мною свойство циклоиды».

С 1661 года начинаются испытания морского варианта маятниковых часов, но постепенно становится ясно, что надежного морского хронометра на этом пути создать не удастся. Однако теоретические изыскания Гюйгенса по математике и механике, предпринятые в связи с совершенствованием часов, были столь значительны, что его книга «Маятниковые часы» (1673 г.), в которой они подытожены, наряду с книгами Галилея и Ньютона, является великим памятником эпохи становления классической механики.

В «Маятниковых часах» Гюйгенс констатировал, что циклоида исследована «точнее и основательнее других кривых».

Последняя тайна циклоиды

Циклоиде довелось еще один раз удивить математиков, на закате века анализа бесконечно малых. Необходимость перейти от рассмотрения отдельных задач к построению общего метода первым осознал *Исаак Ньютон* (1643—1727), который во время «чумных каникул» в Линкольншире (1665—1667) построил свой метод «флюксий». Однако он не торопился публиковать его, сконцентрировавшись на получении разнообразных результатов этим методом. Фейерверк этих результатов сверкает на страницах «Математических начал натуральной философии» (1687), но метод здесь систематически не развивается, оставаясь на втором плане. С начала 70-х годов Готфрид Вильгельм Лейбниц, отвлекаясь от своих многочисленных государственных и научных дел, с возрастающим энтузиазмом начинает разрабатывать формализм дифференциального и интегрального исчисления (под сильным влиянием упоминавшейся работы Паскаля). Он узнает о работах Ньютона, а с 1676 года переписывается с ним. В отличие от Ньютона, Лейбниц активно привлекает внимание к своему методу как при помощи личных контактов, так и пользуясь страницами журнала «Acta Eruditorium» (помните, его читал дядя Тоби), выходящего с 1682 года.

В 1696 году на страницах «Acta Eruditorium» появилась заметка «Новая задача, к решению которой приглашаются математики». Вот ее формулировка: «В вертикальной плоскости даны две точки A и B. Определить путь AMB, спускаясь по которому под действием собственной тяжести тело M, начав двигаться из точки A, дойдет до точки B в кратчайшее время». Задача понравилась; Лейбниц называл ее «столь прекрасной и поныне неизвестной». Впрочем, Галилей в «Беседах» с энтузиазмом обсуждая, что тяжелая точка по отрезку прямой спускается медленнее, чем по ломаной с теми же концами, довольно уверенно утверждал, что быстрее всего точка спустится по четверти круга. Кривую наискорейшего спуска стали называть *брахистрохроной*. Но является ли она дугой окружности?

Своевременность задачи проявилась в том, что ее сравнительно быстро решили и оба брата Бернулли — Якоб (1654—1705) и Иоганн (1667—1748), и Лейбниц, и Лопиталь (1661—1704), и Ньютон (он представил анонимное решение, но по словам Иоганна Бернулли, «льва узнают по когтям»). Самым популярным стало решение самого И. Бернулли. Предложенный им ход был совершенно неожидан: он предложил заменить механическую задачу оптической. Нетрудно убедиться, что если рассмотреть оптическую среду, в которой скорость света в точке M равна $\sqrt{2gy}$, где y — разность высот точек A и M, то свет из точки A в B пойдет по брахистохроне (в силу принципа Ферма свет выбирает путь, на который уходит наименьшее время). После этого, пользуясь законом преломления, с одной стороны, и хорошо известным тогда свойством касательной к циклоиде (см. выше), легко вывести, что брахистохрона — это опрокинутая циклоида с острием в точке A!

Один из историков механики об этом писал так:

«Без всякого еще метода, при помощи одной своей геометрической фантазии Иоганн Бернулли одним взглядом решает задачу, умело пользуясь при этом тем, что случайно уже известно,— картина поистине замечательная и удивительно красивая. Мы должны признать в Иоганне Бернулли истинно художественную натуру, действующую в области естествознания. Брат его, Якоб Бернулли, был ученым совсем другого рода. В нем было более сильное критическое начало, но гораздо меньше творческой фантазии. И он решил задачу о брахистохроне, но гораздо более тяжеловесным образом. Зато он не упустил случая развить с большей основательностью общий метод для решения задач этого рода. Таким образом мы находим у каждого из братьев лишь одну из тех двух сторон научного таланта, которые в величайших исследователях природы, каким был, например, Ньютон, бывают соединены с необычайной силой».

Героическая история циклоиды завершилась с концом XVII века. Она так таинственно возникала при решении самых разных задач, что никто не сомневался, что она играет совершенно исключительную роль. Пиетет перед циклоидой держался долго, но прошло время, и стало ясно, что она не связана с фундаментальными законами природы, как, скажем, конические сечения. Задачи, приводившие к циклоиде, сыграли огромную роль в становлении механики и математического анализа, но когда величественные здания этих наук были построены, оказалось, что эти задачи являются частными, далеко не самыми важными. Произошла поучительная историческая иллюзия. Однако, знакомясь с удивительной историей циклоиды, можно увидеть много принципиальных фактов из истории науки.

Что же такое электризация трением?

Л. А. АШКИНАЗИ

— Опять наэлектризовалась, — вздыхаем мы, вынимая из проигрывателя пластинку, облепленную пылью. Слишком сухой воздух — и начинают электризоваться трущиеся о части ткацких и полиграфических машин нити, бумага, синтетические пленки; светочувствительные материалы засвечиваются — при электризации могут происходить электрические разряды, а они, как известно, светятся. Но если электризующуюся и липнущую к человеку одежду можно считать мелочью, то человеку, наэлектризовавшемуся от хождения по линолеуму, не до смеха — при приближении к металлическому оборудованию с его пальца срывается сантиметровая искра. Иногда достаточно снять с себя рубашку из синтетической ткани, чтобы при приближении руки в водопроводному крану получить ощутимый удар. А сколько чувствительных полупроводниковых приборов было испорчено электростатическими разрядами, пока не стали покрывать полы на монтажных участках проводящей краской.

Более серьезные последствия — и легко догадаться какие — могут быть от трения шин о сухую дорогу. Если машина из-за трения о дорогу наэлектризуется, входящего или выходящего человека может «дернуть», а искра рядом с цистерной бензина может вызвать пожар. Поэтому не для красоты висят сзади машин-цистерн для горючих веществ цепи, волочащиеся по дороге. Да и у обычных автомобилей часто есть такая ленточка из проводящей резины... Опасна электризация трением *в производственных помещениях*, где присутствуют пары или пыль горючих веществ, — вызываемые ею разряды могут приводить к взрывам. В США, например, с 1900 но 1959 год было зарегистрировано около двадцати таких взрывов: при этом погибло около десяти человек и был причинен ущерб на сумму два миллиона долларов. Есть от электризации трением и польза: это — простейший способ получения высоких напряжений. Помните электрофорную машину? А ее «старший брат» — генератор Ванн-де-Граафа — еще не так давно был наиболее распространенным источником высоких напряжений (до 20 МВ). И наконец, электризация трением — по-видимому, первое электрическое явление, которое изучали люди.

Тысячи лет назад люди знали, что при трении некоторых веществ одно о другое они, как мы бы сейчас сказали, электризуются. Не исключено, что древнеегипетские и древнегреческие жрецы поражали публику зрелищем гребня, притягивающего кусочки папируса. Однако, несмотря на столь древнюю историю, с элекризацией трением не все ясно до сих пор. Когда-то полагали, что есть некая электрическая жидкость, перетекающая от тела к телу при контакте, а тело с ее недостатком притягивается к телу с ее избытком.

Когда люди открыли электрон, они поняли, что наэлектризованное тело должно содержать избыток или недостаток электронов, и стали считать, что при трении электроны переходят от одного тела к другому. Но такое заключение было не вполне обосновано: в диэлектрике — на то он и диэлектрик — электроны не могут двигаться свободно. Существенный прогресс в понимании того, как происходит электризация трением, был достигнут в последнее десятилетие. Об этом и пойдет дальше речь. Эксперименты, о которых будет рассказано, выполнялись в 1969—1977 годах в Физико-техническом институте им. А. Ф. Иоффе в Ленинграде. Два цилиндрика из хороших диэлектриков (тефлон, янтарь, рубин, оргстекло), диаметром 10 мм и высотой 14 мм, прижимались один к другому торцами и вращались со скоростью 0,5 об/с один относительно другого (рисунок 1,*а*). Через три оборота измерялись заряды цилиндриков, для чего они разъединялись и по очереди помещались в камеру, соединенную с электрометром (рисунок 1,*б*); потом они опять ставились один на другой, делалось еще три оборота, опять измерялись заряды, и так далее. Оказалось, что исходно нейтральные образцы при трении заряжаются. Сумма их зарядов, однако, остается равной нулю. Следовательно, в процессе переноса зарядов не участвует «третий лишний».

Далее, оказалось, что при вращении цилиндриков заряды их сначала постепенно увеличиваются (у одного — отрицательный, у другого — положительный), а при скорости примерно тридцать оборотов в секунду стабилизируются. Простое касание цилиндриков переноса заряда не вызывает, то есть существенно именно трение. Накопленный заряд сохраняется несколько недель, но только если держать образец в камере, лишенной доступа воздуха. На открытом воздухе заряд «утекает» за сутки — имеющиеся в воздухе ионы притягиваются к поверхностным зарядам образца и нейтрализуют их. (Между прочим, на этом эффекте основано действие одного из приборов, измеряющих дозу радиоактивного облучения: излучение ионизирует воздух, и образовавшиеся ионы нейтрализуют заряд на предварительно заряженном миниатюрном электроскопе: быстрота «спадания» листочков электроскопа может служить мерой радиоактивного излучения.) Если же образец лишен доступа воздуха, то нейтрализация поверхностных зарядов быстро прекращается, а из-за низкой собственной проводимости диэлектрика притока зарядов изнутри на поверхность образца практически нет.

Итак, почему разряжается образец, заряженный при электризации трением, понятно. Но почему он все-таки заряжается?

Приглядимся внимательнее к ионам, собирающимся на образце, и к самому образцу. Пусть наш образец — ионный диэлектрик, кристаллическая решетка которого состоит из ионов двух сортов, например Li^+F^-. Однако при его образовании получилось так, что вместо части ионов в нем пустые места — вакансии. Вакансии могут быть на месте ионов Li^+ и на месте ионов F^-, и если количество вакансий не одинаково, то кристалл будет иметь собственный заряд. Раз есть собственный заряд, то к образцу притягиваются из воздуха ионы. Вместе с прилипшими к его поверхности молекулами воды и газов воздуха они образуют

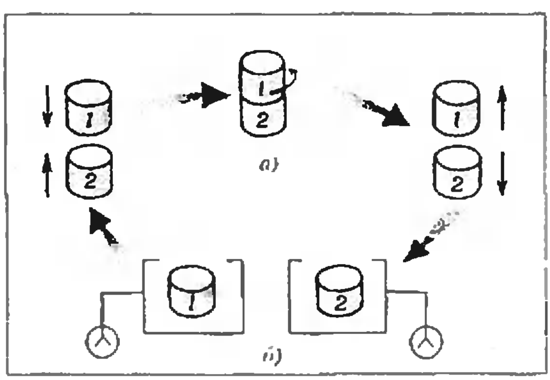


Рис. 1.

«шкурку». Заряд шкурки в точности равен собственному заряду образца, но, конечно, с обратным знаком (так что в целом образец нейтрален).

Остальное понятно — разные диэлектрики, разные собственные заряды и разные заряды шкурок. Потерли, перемешали шкурки — и получили заряженные куски.

Пусть, например, каждый цилиндрический образец имеет длину, равную диаметру. Тогда площадь торца будет составлять 1/6 от всей поверхности. Обозначим заряды шкурок на образцах (до трения) q_A и q_B и будем считать, что заряд каждой шкурки распределен по поверхности образца равномерно. Тогда после трения, когда шкурки на торцах перемешались и их заряды разделились поровну, полные заряды q'_A и q'_B новых шкурок будут состоять из 5/6 собственных старых зарядов и половины от суммы $^1/_6 q_A$ и $^1/_6 q_B$:

$$q'_A = \frac{5}{6} q_A + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{6} q_A + \frac{1}{6} q_B\right) = q_A + \frac{1}{12}(q_B - q_A),$$

$$q'_B = \frac{5}{6} q_B + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{6} q_A + \frac{1}{6} q_B\right) = q_B + \frac{1}{12}(q_A - q_B).$$

Ясно, что раз заряд шкурки изменится (а это будет всегда, когда $q_A \neq q_B$), то изменится и заряд образца в целом.

А могут ли электризоваться два куска одного и того же диэлектрика? Если они имеют одинаковые собственные заряды, то нет. Но они могут иметь разные собственные заряды, то есть содержать разные количества вакансий, если условия образования кусков различались (например, один кусок ионного диэлектрика образовывался в окружении паров какого-то из входящих в него элементов, так что заполнялись все вакансии на месте ионов этого элемента, а вокруг другого куска давление паров было меньше, и вакансии на месте ионов остались). Поэтому и была обнаружена электризация при трении двух цилиндриков из одинакового, казалось бы, рубина.

Электризация происходит не только при трении. Фарадей писал в 1833 году, что электризация возникает при деформации кристаллов, в том числе при их раскалывании. Однако время для исследования этого процесса, видимо, тогда еще не пришло. Почти через сто лет, в 1930 году, было замечено, что электризуется при расщеплении слюда, но детальное изучение электризации при расщеплении началось спустя четверть века.

Как уже говорилось, кристалл диэлектрика «сам по себе», то есть с чистой поверхностью, без шкурки, не нейтрален. В нем есть вакансии, и, как правило, они распределены по кристаллу неравномерно. Заряд же шкурки, нарастающей на образец, во многих случаях можно считать распределенным по его поверхности почти равномерно. Когда мы ломаем кристалл пополам, половинки получают «в наследство» по половине объема и поверхности, а с ними — по полшкурки. Но заряд шкурки делится при этом честно, поровну, заряд же объема, если он был распределен неравномерно, делится не поровну. В этом случае заряды получившихся при расколе частей будут иметь противоположные знаки, так как у одной части заряд шкурки будет больше собственного (объемного), а у другой — меньше. Но есть и другая причина неравномерного деления заряда.

Кристалл LiF устроен простейшим из возможных способов: кубическая решетка, ионы Li^+ и F^- чередуются вдоль любой оси. При ударе кристалл раскалывается обычно по плоскости,

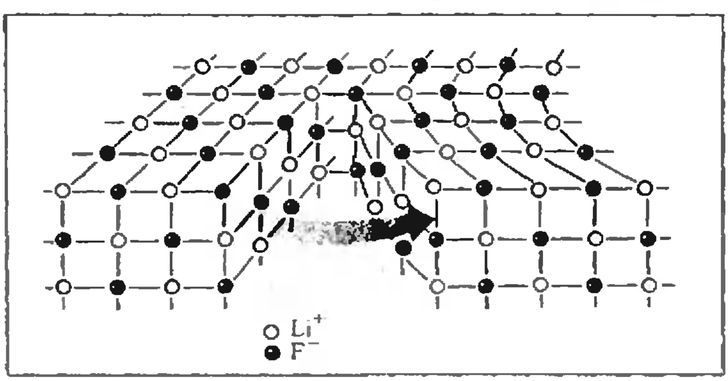


Рис. 2.

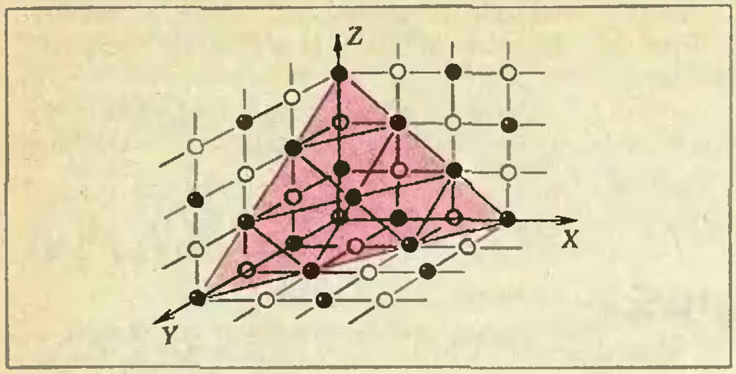


Рис. 3.

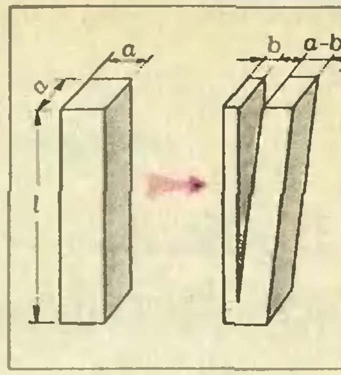


Рис. 4.

перпендикулярной осям кристаллической решетки (рисунок 2). Но иногда направление трещины может измениться, и она пойдет по диагонали в плоскости, в которой лежат ионы одного сорта (рисунок 3).

В этом случае на одной поверхности трещины сразу после раскола оказываются ионы одного знака, а на другой — противоположного. И действительно, при движении зонда электрометра вдоль поверхности раскола такие участки были обнаружены.

Но значительно более сильное неравенство зарядов отдельных кусков было обнаружено при расколе образца на неодинаковые части. Действительно, пусть длинный кристалл с квадратным торцом со стороной, равной a, и длиной $l \gg a$ (рисунок 4) раскалывается на две части, толщины которых b и $a-b$. Если ϱ — средняя плотность собственного объемного заряда целого кристалла, то поверхностная плотность σ заряда шкурки вычисляется из условия равенства нулю суммы зарядов:

$$Q_{\text{кристалла}}+Q_{\text{шкурки}}=0.$$

Пусть площадь торцов мала и заряд шкурки на них можно не учитывать. Тогда

$$4al\sigma+\varrho la^2=0.$$

Отсюда находим плотность заряда шкурки:

$$\sigma=-a\varrho/4.$$

Считая, что плотности объемных зарядов левой и правой частей одинаковы (и равны ϱ), находим заряд, например, левой части, равной сумме объемного и поверхностного зарядов:

$$\varrho abl-\frac{\varrho al}{4}(a+2b)=\frac{\varrho al}{2}\left(b-\frac{a}{2}\right)<0,$$

что и было обнаржено на опыте.

...Разумеется, это далеко не все, что можно рассказать о механизмах электризации. Массу интересных вопросов можно задать о моменте, когда трещина разделяет кристалл (электроны могут «перепрыгивать» со стенки на стенку), об острие сапфирового «рубила» (электроны могут переходить и на него), наконец, о механизме электризации при трении диэлектрика по металлу, о механизме электризации при сжатии кристаллов и так далее. На некоторые из этих вопросов ответы уже получены. Остальные — ждут своего времени. И, может быть, вас.

Задачи наших читателей

1. Докажите, что не существует натуральных чисел x, y, z таких, что

$$x^{p-1}+y^{p-1}=z^{p-1},$$

где p — простое, $p>3$, а x и y не делятся на p.

Указание: примените Малую теорему Ферма: $a^{p-1}\equiv 1 \pmod p$, где a — натуральное и $(a, p)=1$ (см. «Квант», 1978, № 10, с. 7).

2. Докажите, что при $p=3$ любое решение диофантова уравнения

$$x^{p-1}+y^{p-1}=z^{p-1},$$

состоящее из попарно взаимно простых натуральных чисел, содержит число кратное 3.

О. А. Черепанов

Не беда, что нет функций

А. И. ПРИВЕНЬ

— Папа, ты знаешь, Маше Сидоровой родители купили новенькую «Электронику Б3-36» с функциями. И у других ребят она есть...

— А что, твоя «Электроника Б3-30» плохо работает?

— Работать-то она работает, но на ней же нет функций: только арифметические действия делает, и корни извлекает. А у нас в девятом классе всё синусы и косинусы, логарифмы, показательные функции. Не носить же мне всюду с собой таблицы Брадиса!

— Не беда, что нет функций. Ты же у нас математиком хочешь быть, значит соображать должна. Ряд Тейлора на кружке вам рассказывали? Ну тогда слушай...

Как сосчитать логарифм

Сначала немного теории. Ты, конечно, знаешь, что

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x}=e.$$

Это равенство с достаточной точностью выполняется, если x близко к 0. Тогда получаем $(1+x)^{1/x}\approx e$, или $1+x\approx e^x$, откуда

$$\ln(1+x)\approx x, \qquad (1)$$

то есть, отняв от числа единицу, получим его натуральный логарифм. А как быть с большими числами?

Довольно просто. Ведь

$$\ln a=\ln(a^{N/N})=N\ln(a^{1/N}).$$

Если N достаточно велико (о конкретных значениях поговорим позже), то

$$a^{1/N}\approx 1 \quad \text{и} \quad \ln(a^{1/N})\approx a^{1/N}-1.$$

На машинке $a^{1/N}$ вычисляется легко, если $N=2^n$ — достаточно лишь n раз нажать на клавишу $\boxed{\sqrt{}}$. А затем для нахождения искомого логарифма нужно вычесть единицу и умножить на соответствующую степень двойки:

$$\ln a=\ln a^{N/N}=N\ln a^{1/N}\approx(a^{1/N}-1)\cdot N. \qquad (2)$$

Осталось лишь найти оптимальное значение N. Из равенства (1) вытекает

$$\ln(1+x)^{1/2}=\frac{1}{2}\ln(1+x)\approx \approx\frac{1}{2}x\approx\ln\left(1+\frac{1}{2}x\right),$$

то есть

$$(1+x)^{1/2}=\sqrt{1+x}\approx 1+\frac{1}{2}x. \qquad (3)$$

Чтобы оценить точность этого равенства, воспользуемся формулой Тейлора*). Нам достаточно трех первых членов:

$$f(a+x)=f(a)+xf'(a)+\frac{x^2}{2!}f''(a)+\ldots$$

В нашем случае $a=1$; $f(a+x)=\sqrt{1+x}$;

$$f(a)=\sqrt{a}=1;\ f'(a)=\frac{1}{2\sqrt{a}}=\frac{1}{2};$$

$$f''(a)=-\frac{1}{4a^{3/2}}=-\frac{1}{4},$$

$$\text{то есть}\quad \sqrt{1+x}\approx 1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8};$$

остальные члены при $x\to 0$ можно отбросить.

Таким образом, погрешность формулы (3) примерно равна $x^2/8$. Зададимся величиной погрешности $\Delta=5\cdot 10^{-9}$. Это наибольшая величина, которая не сказывается на показаниях 8-разрядного калькулятора.

Далее просто: $\Delta=\frac{x^2}{8}=5\cdot 10^{-9}$, $x=2\cdot 10^{-4}$. Это значение x должно обеспечить минимум погрешности. Так, значение $\ln 2$, вычисленное по формуле $\ln 2=2^{12}\ (2^{1/2^{12}}-1)=4096\times\times 0{,}0001691$, равно 0,693207 вместо табличного 0,693147.

Однако тут сказывается один чисто «машинный» эффект: извлечение корня (как и другие вычисления) проводится с недостатком в последнем знаке, и эта ошибка с каждым разом увеличивается. В конце концов она перекрывает величину $\frac{x^2}{8}$, и формула для Δ становится неприемлемой. Этот эффект заметно сказывается при $n>10$, где $n=\log_2 N$ — число извлечений корня. В результате тот же $\ln 2$, вычисленный по той же формуле на микрокалькуляторе Б3-30, равен 0,69263... По-

*) О формуле Тейлора см. статью В. Р. Почуева в предыдущем номере «Кванта».

этому в случае $n>10$ целесообразно принять $x=(3,5\div7)\cdot10^{-4}$.

Тот же ln 2, вычисленный на той же машинке при $n=11$, равен 0,69304 с относительной ошибкой 0,014 %.

Итак, мы нашли алгоритм вычисления $\ln a$:

$$\boxed{a}\ \underbrace{\boxed{\sqrt{\ }}\ \boxed{\sqrt{\ }}\dots\boxed{\sqrt{\ }}}_{n\ \text{раз}}\ \boxed{-}\ \boxed{1}\ \boxed{\times}\ \boxed{2^n}$$

Как быть с десятичными логарифмами, ясно из формулы:

$$\lg a=\frac{\ln a}{\ln 10}=\frac{\ln a}{2{,}303}.$$

Для $2<a<10$ достаточно точные результаты дает выражение

$$\lg a\approx(a^{2^{-10}}-1)\cdot445,\ \text{где}\ 445\approx\frac{2^{10}}{\ln 10}.$$

Как считать показательную функцию

Для вычисления функции e^x преобразуем выражение, полученное для $\ln a$. Мы имели $\ln a\approx N(a^{1/N}-1)$, при большом N, значит,

$$a\approx\left(\frac{\ln a}{N}+1\right)^N.$$

Сделав замену $x=\ln a$, получим $a=e^x$ и поэтому

$$e^x\approx\left(\frac{x}{N}+1\right)^N=\left(\frac{x}{N}+1\right)^{2^n}. \qquad (4)$$

Чтобы быстро пользоваться этим соотношением на простейшем калькуляторе, желательно превратить его в *цепочный* алгоритм, то есть такой алгоритм, при котором не нужно записывать промежуточные результаты. Для этого возведение в степень N (или n раз в квадрат) и нужно выполнять, повторяя последовательность команд $\boxed{\times}\ \boxed{=}$ для модели Б3-30 или

$$\dots\boxed{\times}\ \boxed{1}\ \boxed{\times}\ \boxed{=}\ \boxed{=}\dots,$$

для моделей типа Б3-14. При этом результат все время остается во «временной памяти» калькулятора, и поэтому его не нужно вновь вводить в машинку после каждой итерации. Таким образом, алгоритм нахождения e^x выглядит так (ниже n — это натуральное число, притом $N=2^n$):

$$\boxed{x}\ \boxed{:}\ \boxed{2^n}\ \boxed{+}\ \boxed{1}\ \underbrace{\boxed{\times}\ \boxed{=}}_{}$$

Вычисление функции 10^{x} отличается лишь тем, что после набора 2^n результат умножается на $\ln 10\approx2{,}303$.

Осталась функция x^y. Прологарифмируем ее:

$$\ln(x^y)=y\ln x=Ny\ln(x^{1/N})\approx\approx Ny(x^{1/N}-1).$$

Отсюда по формуле (4)

$$x^y=e^{\ln(x^y)}\approx e^{Ny(x^{1/N}-1)}\approx\approx\left[\frac{Ny(x^{1/N}-1)}{N}+1\right]^N==[y(x^{1/N}-1)+1]^N. \qquad (5)$$

Формула (5) представляется программой:

$$\boxed{x}\ \underbrace{\boxed{\sqrt{\ }}\ \boxed{\sqrt{\ }}\dots\boxed{\sqrt{\ }}}_{n}$$

$$\boxed{-}\ \boxed{1}\ \boxed{\times}\ \boxed{y}\ \boxed{+}\ \boxed{1}\ \underbrace{\boxed{\times}\ \boxed{=}}_{n}$$

Как считать тригонометрические функции

Здесь формула Тейлора дает два удобных выражения для синуса и косинуса

$$\sin x\approx x-\frac{x^3}{6}=\frac{(x^2-6)x}{6};$$

$$\cos x\approx1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}=1+\frac{(x^2-12)x^2}{24}.$$

Первое выполняется достаточно точно при $x\leqslant\frac{\pi}{4}$; то же можно сказать и о втором. Величина $\frac{x^4}{24}$ начинает заметно сказываться при $x>\frac{\pi}{6}$, при $x<\frac{\pi}{6}$ можно упростить формулу для $\cos x$, отбросив третий член:

$$\cos x\approx1-\frac{x^2}{2}.$$

Ограничение $x\leqslant\frac{\pi}{4}$ не опасно, так как тригонометрические функции всегда можно привести к аргументу, меньшему $\frac{\pi}{4}$.

* * *

Как видишь, совсем немного математики — и простейший микрокалькулятор становится пригодным для вычисления практически всех «школьных» функций.

Мостик из бумаги

Доктор физико-математических наук
А. А. БОРОВОЙ

I. Одно из важнейших свойств любых инженерных конструкций — их жесткость. Понятно, что ни под действием собственной силы тяжести, ни под влиянием внешних нагрузок конструкция не должна изменять свою форму. Правда совсем избежать деформации невозможно, но нужно так выбрать материал, тип деталей, чтобы изменения формы происходили до определенного, заранее рассчитанного предела. Эта задача, стоящая перед инженерами, почти всегда дополняется другой: сделать конструкцию наиболее простой, дешевой, легкой, истратить на нее как можно меньше материалов.

Лавируя между этими противоречащими друг другу требованиями, инженеры-конструкторы находят оптимальное для данной задачи решение. В ряде отраслей промышленности, как например в авиастроении, вопрос о сочетании максимальной жесткости и одновременно минимальной массы жизненно важен.

Великим конструктором является природа. Давно уже решила она многие задачи, волнующие инженеров. В ходе естественного отбора возникли такие шедевры, как перо птицы, стебель бамбука, полые кости наземных животных и т. п.

Мы недаром привели в качестве примера природные конструкции, имеющие в своей основе трубку — полый цилиндр. Почему они получили такое широкое распространение?

Попробуем разобраться в этом. А начнем с весьма простого эксперимента.

II. Опыт, который предлагается провести, известен в литературе как «Опыт Умова» (или «Прочность трубки»).

Николай Алексеевич Умов (1846—1915) был крупным русским физиком, на протяжении почти двадцати лет — профессором Московского университета. Наиболее важные его работы связаны с вопросом переноса энергии, он впервые ввел понятие скорости и направления движения энергии, потока энергии, плотности энергии в данной точке и т. п. Известен был Умов и как прекрасный лектор, уделяющий много внимания демонстрационным экспериментам.

В домашних условиях опыт можно выполнить с помощью совсем простой «аппаратуры». Вырежьте из плотной бумаги два прямоугольника длиной около 20 и шириной около 8 см. Затем, используя в качестве подставок две стопки книг, так, как это показано на рисунке 1, положите на них один из листков и нагрузите его легкими гирьками (а если таких нет, то монетами). Под малым грузом листок — своеобразный мостик — сильно прогнется (см. рис. 1,*а*).

Оказывается, жесткость нашей конструкции можно увеличить в десятки раз, причем очень простым способом. Для этого второй листок сверните в трубку и обмотайте ниткой, чтобы он не развертывался. Вы увидите, что под прежним грузом трубка практически не прогибается. Только значительно бо́льшая гиря заставит ее заметно деформироваться (см. рис. 1,*б*).

А насколько жестко, например, перо птицы? Проведите аналогичные испытания. В наших опытах гусиное перо длиной около 10 см «держало» гирю массой 0,5 кг.

«Опыт Умова» можно существенно видоизменить. Изготовьте из одинаковых листков бумаги так называемые профили: углы с равными и неравными сторонами, швеллеры, тавры и двутавры, гофрированный лист (рис. 2). Убедитесь, что все они имеют гораздо бо́льшую жесткость, чем исходный мостик из бумаги. Для этого проведите ряд сравнительных опытов: определяйте величину прогиба при равных грузах или добивайтесь одинакового прогиба, нагружая конструкцию различными гирьками.

III. Теперь надо, хотя бы на качественном уровне, разобраться, от чего же зависит жесткость конструкции по отношению к изгибу.

Проделайте еще один опыт. Для него вам понадобится прямоугольный брусок из резины (или другого упругого материала) с поперечным сечением приблизительно 1—2 см^2 и длиной около 10 см.

Нанесите на брусок масштабную сетку из продольных и поперечных прямых линий (рис. 3,*а*). Затем согните брусок — сетка исказится (рис. 3,*б*). При этом поперечные линии останутся прямыми, но повернутся относительно друг друга и перестанут быть параллельными, а продольные линии искривятся. Нетрудно заметить, что материал бруска на одной стороне испытывает растяжение, а на другой — сжатие. Но среди продольных линий есть одна, идущая посередине, которая не изменяет своей длины. Очевидно, что и весь горизонтальный слой материала, лежащий за этой линией, не испытывает деформации. Поэтому он носит название нейтрального слоя (или нейтральной поверхности).

Из этого опыта следует, что чем дальше от нейтральной поверхности расположен участок бруска, тем большее растяжение (или сжатие) он испытывает. Тогда, согласно закону Гука, и сила упругого сопротивления изгибу возрастает по мере удаления от нейтрального слоя. Другими словами, основной вклад в жесткость бруска вносит слой, наиболее далекий от нейтрального. А отсюда вывод: чтобы увеличить жесткость конструкции, надо расположить ее основной материал как можно дальше от этого слоя. Вот почему листок бумаги в «Опыте Умова» почти не оказывает сопротивления нагрузке, а, например, двутавр из того же материала ведет себя значительно жестче.

Однако удалением основного материала от нейтральной поверхности слишком увлекаться нельзя. Так, если двутавровую балку сделать в середине очень тонкой, она станет неустойчивой и будет скручиваться. В то же время правильно сконструированный двутавр при одинаковой жесткости со сплошной балкой квадратного сечения оказывается в четыре с половиной раза легче.

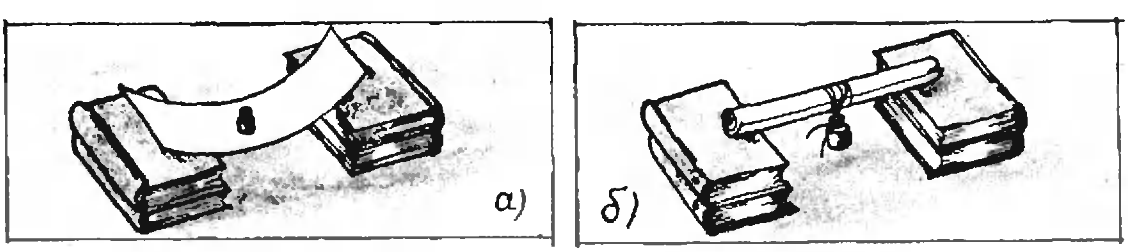


Рис. 1.

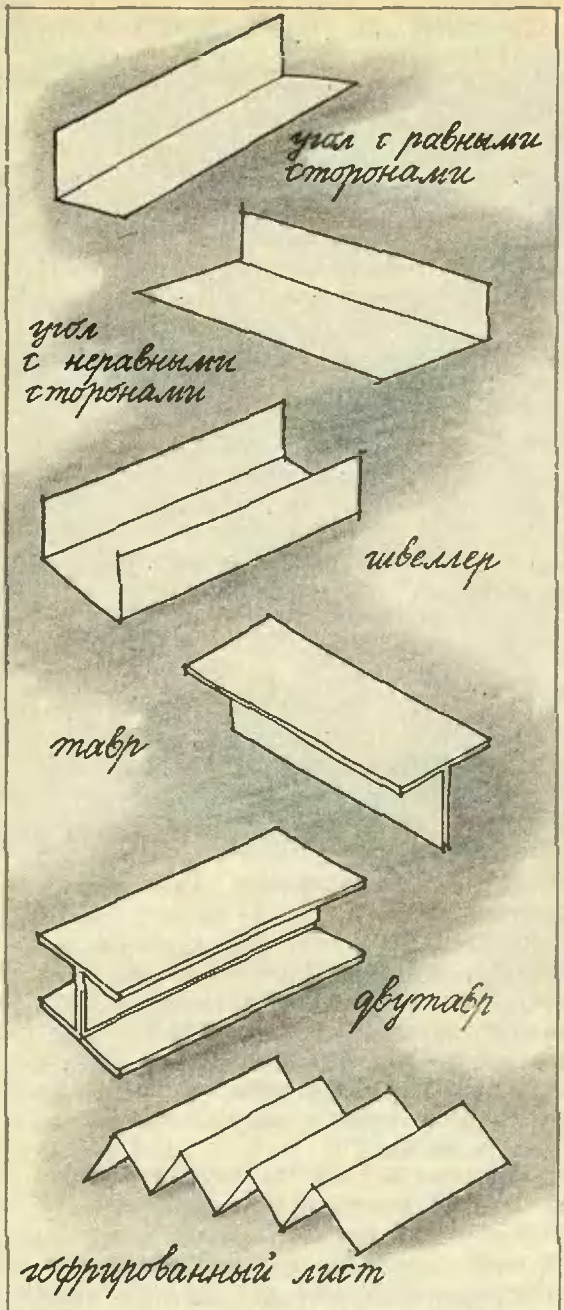


Рис. 2.

Полый цилиндр в силу своей симметрии одинаково реагирует на нагрузку с любой стороны, и материал его достаточно удален от нейтральной поверхности, вот почему во многих случаях именно он является оптимальной конструкцией. По сравнению со сплошной цилиндрической балкой полая мало проигрывает в жесткости по отношению к изгибу, но сильно выигрывает в экономии материала. Например, если внутри сплошного цилиндра диаметром D сделать отверстие диаметром $D/2$, то, как показывают расчеты, жесткость балки уменьшится всего на 6—7 %, а экономия материала составит около 25 %.

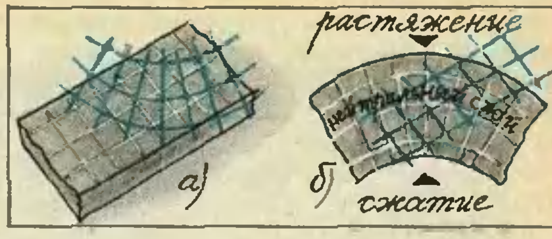


Рис. 3.

Теперь понятно, почему природа так широко использует трубчатые конструкции. А родились они в процессе эволюции. Пока жизнь сосредоточивалась в воде, особой необходимости в малой массе скелета не было — помогала выталкивающая сила жидкости. Поэтому у акул, например, сохранился от предков массивный хрящевой скелет. Но вот живые существа вышли на сушу. Теперь прочность скелета должна была сочетаться с возможно меньшей его массой. Миллионы лет длился процесс превращения хрящевых образований в трубчатые кости и закончился созданием прочной, легкой и весьма экономной по расходованию материала конструкцией.

IV. Попытки построить бумажный мостик между двумя стопками книг привели к тому, что мы на опыте (а потом и качественными рассуждениями) убедились в том, что его надо делать не плоским, а профилированным.

Есть и другой способ увеличить жесткость мостика — использовать конструкцию, называемую фермой. Простейшую ферму, представленную на рисунке 4, легко изготовить самостоятельно. К середине листка бумаги приклейте поперечную полоску, соединенную натянутыми нитками с концами

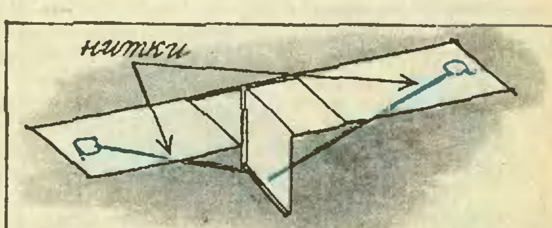


Рис. 4.

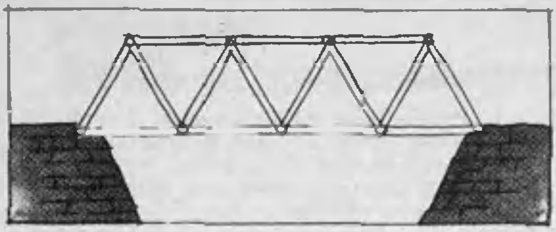


Рис. 5.

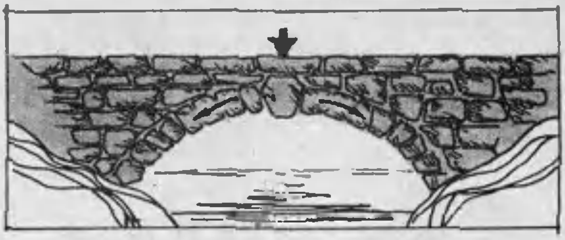


Рис. 6.

листка. (Подумайте, как прочно закрепить концы ниток.) Теперь, если мостик нагрузить, он начнет прогибаться и нитки натянутся сильнее. Разорвать их достаточно трудно, и поэтому такая конструкция значительно жестче, чем плоский листок.

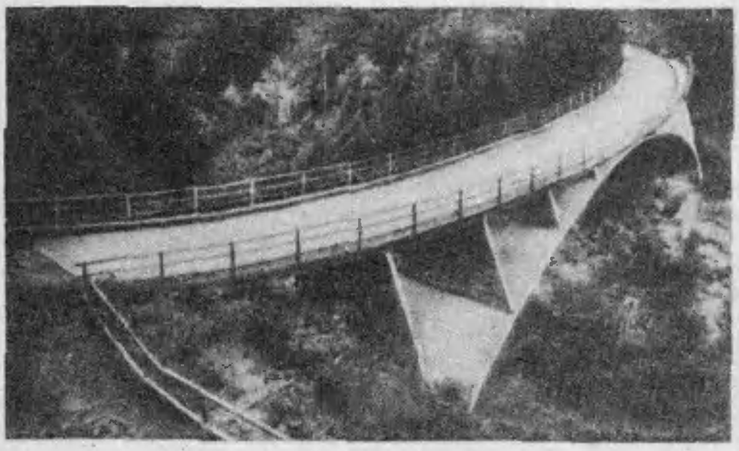
Фермы очень часто используются в строительстве мостов (рис. 5). С их помощью напряжение изгиба переводится в напряжение растяжения или сжатия балок и стержней, роль которых в нашем опыте сыграли нитки.

Можно упомянуть еще одну очень распространенную в строительстве конструкцию — арочный мост (рис. 6). Арки были известны с глубокой древности, чуть ли не с начала четвертого тысячелетия до нашей эры. Принцип их действия состоит в трансформации вертикальных нагрузок в боковые давления арочного кольца, которые передаются на основание (пяту) арки.

Вообще различных конструкций мостов существует великое множество. Ведь, кроме решения инженерных и экономических вопросов, создатели моста должны еще «привязать» его облик к местности, добиться того, чтобы он был красив. Никакого общего рецепта здесь не существует, и, может быть, это и к лучшему. Вспомним хотя бы мосты Ленинграда — какое прекрасное разнообразие всевозможных решений!

В заключение статьи мы хотели бы напомнить читателям, что для многих выдающихся изобретателей и инженеров создание в детстве макетов самых разных машин и конструкций было как бы первым шагом к выбору своей дальнейшей специальности. «Интерес к технике у меня появился при изготовлении строительных моделей и не столько моделей, сколько, главным образом, макетов (в период 6—7 классов)»,— так писал крупный ученый, конструктор и инженер в области транспорта академик В. Н. Образцов.

Возвращаясь к тем опытам, которые мы вам предлагали проделать, следует отметить, что сконструировать прочный и красивый мостик из бумаги, применив необычные «инженерные» находки, тоже не легко. Если это занятие вас увлечет, и модель получится интересной, мы будем рады получить (а возможно, и опубликовать) ее фотографии и описание.



Арочный мост, который в начале нашего века создал швейцарский инженер Робер Майар. Фотографию и чертежи этого моста можно встретить буквально в каждом общем труде по архитектуре. Мост поражает зрителя смелостью формы и совершенством инженерной конструкции.

Заочная олимпиада по программированию

17 февраля 1985 года Учебно-производственный центр вычислительной техники Октябрьского района Москвы и институты Электронных управляемых машин Минприбора СССР и Проблем информатики АН СССР провели традиционную (шестую) Московскую городскую олимпиаду по программированию для школьников, в которой участвовали около 200 человек.

Журнал «Квант» предлагает всем школьникам и учащимся ПТУ, умеющим программировать (кроме москвичей), задачи этой олимпиады в качестве задания *Заочной олимпиады по программированию*. Решения отправляйте не позднее 1 августа (по почтовому штемпелю) на адрес «Кванта», написав на конверте: «Олимпиада по программированию». Присланные решения будут оцениваться жюри под председательством доктора физико-математических наук А. Л. Брудно. Всем участникам будут присланы отзывы об их работах. Победители получат Дипломы журнала «Квант».

Имейте в виду, что описки снижают оценку решения. Снижают оценку и алгоритмы с излишним числом действий или массивами, без которых можно обойтись. Хорошие алгоритмы и экономно написанные программы оценку повышают. В каждой работе засчитываются только 3 задачи с более удачными решениями.

Задачи приведены в порядке убывания трудности. Принимаются решения на любых языках программирования. Перед решением надо дать словесное описание алгоритма.

Задачи

1. **Разложение на слагаемые.** Напечатать все способы представления натурального числа n суммой натуральных чисел. Перестановка слагаемых новым способом не считается.

2. **Равные элементы.** Задан массив чисел $P[1:m, 1:n]$. Каждая строка массива упорядочена по возрастанию. Найти и отпечатать число, встречающееся во всех строках, и надпись *NET*, если такого числа не окажется.

3. **Несоставляемое число.** Задан массив натуральных чисел $M[1:n]$. Найти и отпечатать минимальное натуральное число, не представимое суммой элементов массива M. Сумма может состоять и из одного слагаемого, но каждый элемент массива может входить в нее только один раз.

4. **Тетраэдры.** На гранях двух равных правильных тетраэдров M и N написаны числа $M1$, $M2$, $M3$, $M4$ на одном, и $N1$, $N2$, $N3$, $N4$ на другом (в том же порядке). Можно ли совместить тетраэдры так, чтобы на совпавших гранях оказались написаны одинаковые числа? Напечатать *DA* или *NET*.

5. **Самое частое число.** В массиве чисел $M[1:n]$ найти число, повторяющееся максимальное количество раз. Если их несколько, то одно из них.

6. **Системы счисления.** В целочисленном массиве $M[1:9]$ записаны разряды (цифры) некоторого натурального числа в i-ричной системе счисления ($M[1]$ — разряд единиц и т. д.). Отпечатать разряды этого числа в j-ричной системе счисления. Числа i и j не более числа десять.

7. **Боковая диагональ.** Найти сумму элементов $A[i, j]$ массива $A[1:m, 1:n]$, имеющих заданную разность индексов $i-j=k$. Число k — целое, но не обязательно положительное.

* * *

Пояснение. Здесь массив $P[1:m, 1:n]$ обозначает массив чисел P_{ij} для $i=1, 2, ..., m$ и $j=1, 2, ..., n$, а запись $P[i, j]$ обозначает элемент P_{ij}. Если сказано, что массив $P[1:m, 1:n]$ задан, то значит заданы числа m, n и значения элементов массива. Аналогичный смысл имеют обозначения и задания других массивов.

В программах (решениях) ученики вводят извне заданные значения и печатают их. Некоторые оформляют решения в виде подпрограмм (в алголе — procedure, в фортране — subroutine и т. д.). В тех языках, где размеры массивов нужно задавать числами (как на фортране), ученики их выбирают произвольно.

«Хорошие решения» должны укладываться (с точностью до постоянного множителя) в следующие количества действий: $m \cdot n$ (задача 2), n^2 или $n \cdot \log n$ (задачи 3 и 5), $\min\{m, n\}$ (задача 7), считая n и m большими числами.

Квант для младших школьников

Задачи

1. В корзине лежат 20 грибов: белые, подосиновики и подберезовики. Сколько в ней белых грибов, если подберезовиков в ней в 9 раз больше, чем подосиновиков?

2. Восстановите деление:

```
3***|*3
*3
 **
 **
 *3*
 ***
   0
```

3. Поверхность кубика $1\times1\times1$ *нельзя* оклеить целиком полоской бумаги 1×6, не допуская разрывов. Можно ли такой кубик оклеить полоской бумаги 1×12 в два слоя?

4. Рассматриваются всевозможные треугольники со сторонами $a<2$, $b<3$, $c<4$. Найдите длину наибольшей из высот таких треугольников.

5. Фотограф сделал свой снимок, стоя в лодке (см. рисунок). Оцените длину изображенного катера, считая, что фотографом были вы.

Эти задачи нам предложили С. Н. Олехник, Н. К. Антонович, В. В. Произволов, Г. А. Гальперин, Я. Л. Калда.

БИЛЛЬ ВЫЛЕТАЕТ В ТРУБУ

Но это был Белый Кролик. Он медленно трусил назад, с волнением глядя по сторонам, словно что-то искал. Алиса услышала, как он бормочет про себя: — Ах, Герцогиня! Бедные мои лапки! Бедные мои усики! Она велит меня казнить! Как пить дать, велит! Где же я их потерял? Тут он заметил Алису.

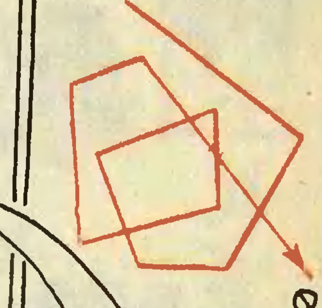
— Эй, Мери-Энн, — сердито крикнул он. Беги-ка скорей домой и принеси мне пару перчаток и веер! Да поторопись! Алиса так испугалась, что со всех ног бросилась исполнять поручение. «Он, верно, принял меня за горничную», — думала она на бегу. В эту минуту она увидела чистенький домик. На двери была прибита медная дощечка, начищенная до блеска, а на дощечке было написано: «Б. Кролик». Алиса без стука вошла и побежала по лестнице наверх. «Как странно, что я у Кролика на побегушках!» Размышляя таким образом, она пробралась в маленькую комнатку.

так задрожала, что

— Слышишь? Хозяин велит тебе лезть! — Ах вот оно что! — сказала про себя Алиса. — Значит, лезть приходится Биллю? Я бы ни за что не согласилась быть на его месте. Камин здесь, конечно, невелик, а все же лягнуть его я сумею! Алиса просунула ногу подальше в камин и стала ждать. Наконец

она прислушалась. — Мери-Энн! — кричал голос. — Неси-ка сюда перчатки! Да поторапливайся! Вслед за тем на лестнице послышался топот маленьких ног. Алиса поняла, что это Кролик ее ищет, и

Делай, что тебе говорят! Алиса еще немножко подождала, но все было тихо. Немного спустя послышался скрип колес и гул голосов.
— Эй, Билль! Тащи-ка ее сюда!
— Надо сначала их связать!
— Они и до середины не достают!
— Достанут, не бойся!
— Эй, Билль! Лови веревку!
— Осторожно! Это черепица шатается... — Сорвалась! Падает! — Головы береги! Послышался громкий треск. — Кто полезет в трубу? — Я не полезу! — Пусть лезет Билль! — Эй, Билль!



1. Разбойнику, приговоренному к казни, Герцогиня сказала: «Клянусь честью, тебя повесят, если ты сейчас солжешь, и утопят, если скажешь правду!». Разбойник, подумав немного, ответил так, что Герцогиня не смогла выполнить своей угрозы. Что сказал разбойник?

2. Вы вошли в темную комнату. В коробке у вас всего одна спичка. В комнате находятся свеча, керосиновая лампа и готовая к растопке печь. Что вы зажжете в первую очередь?

3. Два человека собирались поужинать. Один из них принес 3 огурца, второй — 2 огурца. Тут пришел третий, попросил поесть и обещал заплатить за это. Все съели поровну, после чего третий оставил 5 пенсов и ушел. Как первые два человека должны разделить эти деньги?

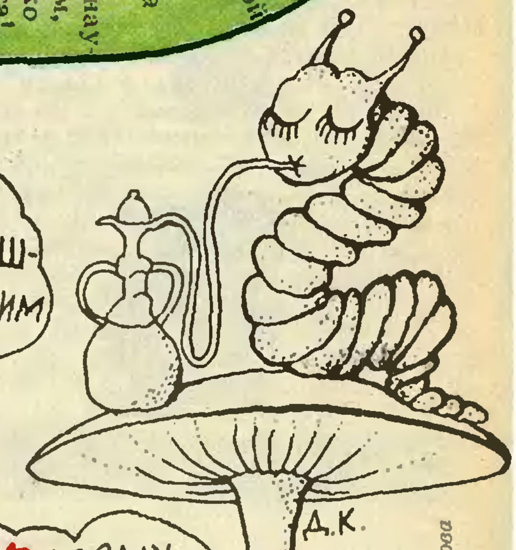
4. Пат приближался к домику со скоростью 0,5 м/с, а удалялся со скоростью 10 м/с, так что через 21 секунду он снова оказался возле Кролика. На каком расстоянии от домика стояли Пат и Кролик вначале?

весь голос: — Попробуйте только, я натравлю на вас Дину! Мгновенно наступила мертвая тишина. «Интересно, что они теперь будут делать? — подумала Алиса.— Если бы они хоть что-нибудь соображали, они бы сняли крышу!» Минуты через две внизу опять началось движение. Алиса услышала, как Кролик сказал: — Для начала хватит одной тачки. «Тачки чего?» — подумала Алиса. Недоумевала она недолго. В следующую минуту в окно посыпался град мелких камешков. Некоторые попали ей прямо в лицо. «Сейчас я это прекращу»,— подумала Алиса. — Перестаньте! — крикнула она во весь голос. — А то худо будет. Снова наступила мертвая тишина. Алиса меж тем с удивлением заметила, что камешки, упав на пол, тотчас превращаются в пирожки. Тут Алису осенило. «Если я съем пирожок,— подумала она,— со мной обязательно что-нибудь случится. Расти мне больше некуда, так что скорее всего я стану меньше!» Она проглотила один пирожок и с радостью заметила, что росту в ней поубавилось. Как только она уменьшилась настолько, что смогла пройти в дверь, она тотчас выбежала из дому и увидала под окнами целую толпу птиц и зверюшек. В середине лежал на земле бедный Ящерка Билль, две морские свинки поддерживали ему голову и чем-то поили из бутылки.

Увидев Алису, все бросились к ней, но она пустилась наутек и вскоре оказалась в дремучем лесу.

— Прежде всего нужно принять прежний вид,— сказала Алиса, пробираясь меж деревьев.— А потом найти дорогу в тот чудесный сад. Так и поступлю — лучше плана не придумаешь! И вправду, план был замечательный — такой простой и ясный. Одно только плохо: Алиса не имела ни малейшего представления о том, как все это осуществить. Она с тревогой вглядывалась в чащу, как вдруг прямо у нее над головой кто-то громко тявкнул. Она вздрогнула и подняла глаза. Гигантский щенок смотрел на нее огромными круглыми глазами и тихонько протягивал лапу, стараясь коснуться ее. — Ве-е-д-ненький, ма-а-ленький! — заискивающе сказала Алиса и попробовала посвистать ему, но губы у нее дрожали, и свист не получился. А что если щенок голоден? Чего доброго еще съест, как перед ним ни заискивай! Алиса нагнулась, подняла с земли палочку и не отдавая себе отчета в том, что делает, протянула ее щенку. Щенок взвизгнул от счастья, подпрыгнул всеми лапами в воздух и ухватился за палку. Алиса увернулась и спряталась за куст чертополоха, испугавшись, как бы щенок на радостях ее не затоптал. Только она показалась из-за куста, как щенок снова бросился на палку, но не рассчитал силы и полетел кувырком. «Играть с ним,— подумала Алиса,— все равно, что играть с лошадью — того и гляди, погибнешь под копытами!» Алиса снова юркнула за чертополох. А щенок не мог оторваться от палки: отбегал подальше, с хриплым лаем бросался на нее, а потом снова отбегал. Наконец он устал и, тяжело дыша, уселся поодаль, высунув язык и полуприкрыв свои огромные глаза. Время улизнуть было самое подходящее. Алиса не стала терять ни минуты. Она бежала, пока совсем не задохнулась от усталости и лай щен-… …тих в отдале-

ним. Тогда она остановилась и, прислонясь к стеблю лютика, стала обмахиваться его листом. — А щенок-то какой чудесный! — сказала задумчиво Алиса.
— Я бы могла его научить разным фокусам, если б... если б только я была нужного роста! Да, кстати, чуть не забыла, мне бы надо еще подрасти! Дайте-ка вспомнить, как это делается? Если не ошибаюсь, нужно что-то съесть или выпить. Только вот что? И вправду, что? Алиса поглядела кругом на цветы и травы, но не увидела ничего подходящего. Неподалеку стоял гриб — большой, почти с нее ростом. Она заглянула за него, и под него, и по обе стороны от него. Тут ей пришло в голову, что если уж на то пошло, можно посмотреть, нет ли у него чего-нибудь на шляпке?



Она поднялась на цыпочки, заглянула наверх — и встретилась глазами с огромной синей гусеницей. Та сидела, скрестив на груди руки, и томно курила кальян, не обращая никакого внимания на то, что творится вокруг.

?6 ПОЧЕМУ, ЕСЛИ БРОСИТЬ БОЛЬШОЙ КУСОК СТЕКЛА, ТО ОН РАЗЛЕТИТСЯ НА БОЛЬШОЕ ЧИСЛО МАЛЕНЬКИХ ОСКОЛКОВ? А ЕСЛИ БРОСИТЬ МАЛЕНЬКИЙ КУСОК, ТО ОН ПОЧТИ НЕ РАЗОБЬЁТСЯ?

?7 ПОЧЕМУ ЧЕМ БОЛЬШЕ КАМУШЕК, ТЕМ СЛЫШНЕЕ ПРОИЗВОДИМЫЙ ИМ СТУК?

?8 НЕ ЗАДУМЫВАЛИСЬ ЛИ ВЫ, ПОЧЕМУ СВИСТ НЕ ПОЛУЧИТСЯ, ЕСЛИ ДРОЖАТ ГУБЫ?

5. Робкий Билль не мог сразу залезть на лестницу. Он то поднимался вверх, то опять опускался, но, наконец, преодолев страх, оказался на крыше. Какое наименьшее число шагов он мог сделать, если за каждый шаг он перемещался на 1 перекладину, на земле оказался один раз, на верхней перекладине — тоже один раз, на остальных перекладинах побывал одинаковое количество раз, и если всего у лестницы 9 перекладин.

6. Удар + удар = драка.

7*. Вы заблудились в выпуклом лесу площади 100 км^2. Докажите, что вы можете выйти из леса, пройдя путь, не больший чем 30 км.

Рисунки Д. А. Крымова.
Задачи и вопросы А. А. Егорова и С. С. Кротова

Наблюдения и эксперименты

1. В круглый сосуд с водой (ведро, таз, тарелка) бросают маленький предмет, стараясь попасть в центр. Как проверить точность броска?

2. Соедините нитью середины подвесов двух висящих рядом маятников равной длины так, чтобы нить слегка стягивала их друг с другом. Придерживая один маятник, немного подтолкните другой перпендикулярно стягивающей нити. Что произойдет, если теперь отпустить первый маятник? Почему?

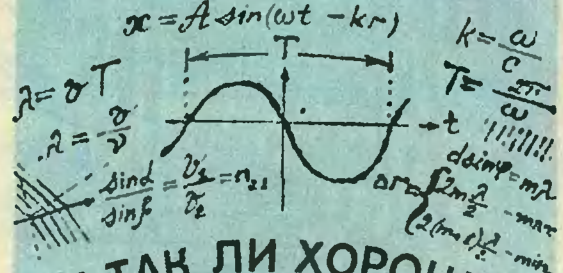
Наблюдения и эксперименты

3. Известен период одного из двух маятников разной длины. Как, не пользуясь секундомером и линейкой, определить период другого маятника?

4. Как объяснить расцветку крыльев стрекозы, и почему она меняется, если наблюдение вести под разными углами?

«Свет, электричество и магнетизм, квантовая физика — всюду мы имеем дело с волнами, подобно тому, как имели дело с частицами в механике Декарта, Галилея и Ньютона».

Л. Купер. «Физика для всех»

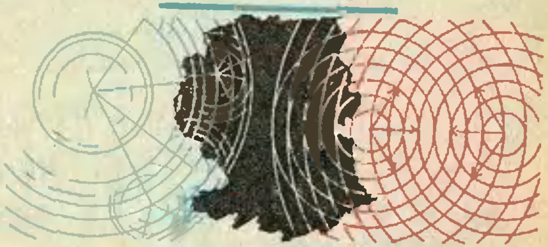


А ТАК ЛИ ХОРОШО ЗНАКОМО ВАМ ПОНЯТИЕ ВОЛНА?

Задачи и задачки

6. Половина полосы закрашена в фиолетовый, другая половина — в красный цвет. Что можно увидеть, глядя на полоску через стеклянную призму, преломляющее ребро которой параллельно полосе?

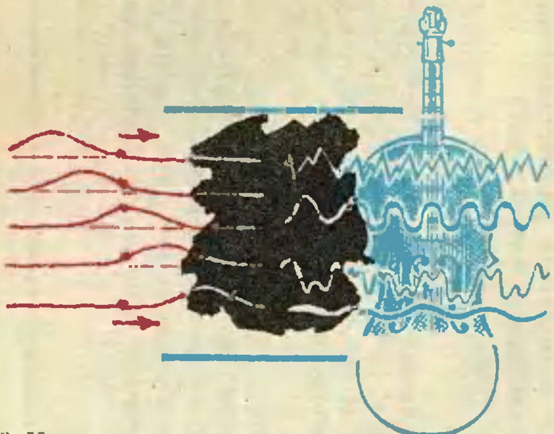
7. Почему после нанесения мельчайшей штриховки пуговицы могут приобрести радужную окраску — стать «перламутровыми»?



Любопытно, что ...

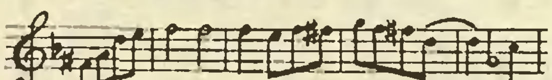
...звуковая волна, выйдя из одного фокуса эллипсоида и отразившись от его поверхности, придет в другой фокус. Эту особенность кривых поверхностей знали давно, и во времена инквизиции использовали сводчатые потолки для подслушивания подозрительных разговоров.

1. Почему басовые струны музыкальных инструментов оплетают спиралью из проволочки?



2. Что именно колеблется в электромагнитной волне?

3. Приближаясь к берегу, морские волны «растут», достигая иногда высоты в десятки метров. Отчего это происходит?



4. Бывает, что у пологого берега направление распространения набегающих волн изменяется. Как можно объяснить это явление?

5. Разговор стоящих за приоткрытой дверью людей может быть слышен, но их мы не видим. Почему же звуковые волны достигают нас, а световые — нет?

Задачи и задачки

ВОЛНА — ЭТО ОДНО ИЗ САМЫХ ЗАМЕЧАТЕЛЬНЫХ ПОНЯТИЙ В ФИЗИКЕ, встречающееся в самых разных проявлениях практически во всех ее областях.

ВОЛНЫ распространяются по поверхности океанов и в их толще, в межзвездной пустоте и в кристаллических решетках, бегут по проводам линий электропередач, доносят до нас многообразие цветов и обилие звуков. Существуют волны песчаные и волны на снегу. Землетрясения и океанские цунами — тоже волновые движения, только гигантских масштабов. Есть волны, которые еще не стали привычными и для самых физиков, например, волны в транспортных потоках, в химических реакциях, в сердце и нервной системе, в сообществах биологических организмов, в звездных системах — галактиках. По образному выражению ученых, волны «разбежались» из физики и охватили едва ли не все множество процессов в живой и неживой природе. И самое интересное — все эти волны математически схожи, то есть могут быть описаны одними и теми же уравнениями. Вот почему так важно «подружиться» с этим понятием, ведь и вам, быть может, придется не раз столкнуться с ним самым неожиданным образом.

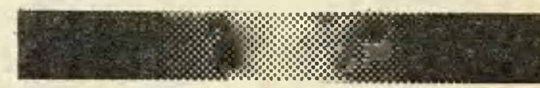
Квант 6/85

Любопытно, что ...

...волнение, даже очень сильное на поверхности воды, быстро затухает по мере погружения. На глубине, равной нескольким длинам волн, не остается почти никакого движения.

...звуковые волны с поверхности Земли не распространяются на высоту более 2,5—3 километров, а, переходя в воздух меньшей плотности, преломляются и, загибаясь, возвращаются на Землю.

...сведения о каждом подземном толчке доставляются сейсмическими волнами трижды. Сперва приходят внутренние волны — продольная, затем поперечная,— а последней прибывает поверхностная (наиболее интенсивная) волна.



Что читать о волнах в «Кванте»

(публикации последних лет)

1. «О волнах на море и ряби на лужах» — 1980, № 9.
2. «Что такое волна?» — 1982, № 6.
3. «Солитоны» — 1983, № 11.
4. «Цвета рассеянного света» — 1984, № 3.
5. «Связанные маятники» — 1984, № 5.
6. «Уравнение волны» — 1984, № 11.
7. «Переговорная трубка длиной в экватор?» — 1985, № 2.

задачник Кванта

Задачи

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые. Решения задач из этого номера можно отправлять не позднее 15 августа 1985 года по адресу: 103006 Москва К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант». В графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» № 6 — 85» и номера задач, решения которых вы посылаете, например «М926, М927» или «Ф938». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки решений). Условие каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «...новая задача по математике»). В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором вы учитесь.

М926—М930; Ф938—Ф942

М926. Докажите, что если

$$x^2+y^2=u^2+v^2=1,\ xu+yv=0,$$

то

$$x^2+u^2=y^2+v^2=1,\ xy+uv=0.$$

С. В. Дужин

М927*. На плоскости дано конечное множество точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Проведено несколько отрезков с концами в данных точках. Эти отрезки разрешается менять: если какие-то два из них, AC и BD, пересекаются, их можно стереть и провести:

а) отрезки AB и CD,

б) отрезки AB и BC.

(Если «новый» отрезок уже проведен, проводить его второй раз не нужно.)

Можно ли после нескольких таких замен (только по правилу а) или только по правилу б), но не по обоим) вернуться к исходному набору отрезков?

В. Е. Колосов

М928. В кинотеатре $N+1$ место. Вначале N человек, имеющие билеты с указанием места (в их числе и Игорь), сели на произвольные N мест, не глядя на свои билеты. Пришедший последним $(N+1)$-й зритель хочет занять свое место; если оно занято,— сгоняет сидящего там, тот поступает так же и так далее, пока нужное согнанному место не окажется свободным. Какова вероятность того, что Игорю придется пересесть? (Другими словами, какую долю среди всех возможных размещений зрителей составляют невыгодные для Игоря?)

И. Б. Алексеев-Астафьев

М929. Натуральные числа a, b, c, d, e удовлетворяют условию $a^4+b^4+c^4+d^4=e^4$. Докажите, что по крайней мере а) три из них четны, б) три делятся на 5, в) два делятся на 10.

В. Д. Яковлев

М930*. Числа от 1 до 1985 разбиты на 6 множеств. Докажите, что в одном из них найдется три числа, одно из которых равно сумме двух других (или два числа, из которых одно вдвое больше другого).

А. Д. Валиев (уч. 9 класса).

Ф938. Пилот космического корабля, движущегося со скоростью $v=1$ км/с, заметил прямо по курсу астероид диаметром $d=7$ км, когда до его поверхности оставалось расстояние $l=8{,}5$ км. Космонавт сразу же включил аварийные двигатели, которые за пренебрежимо малое время сообщают кораблю дополнительную скорость $\Delta v=300$ м/с, направление которой задается космонавтом. Может ли корабль избежать столкновения?

А. В. Андрианов

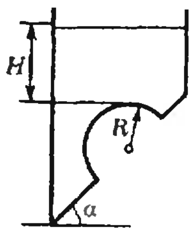


Рис. 1.

Ф939. Дно сосуда наклонено под углом $\alpha=45°$ к горизонту. В дне имеется полусферическая выпуклость радиуса R (рис. 1). Высота столба жидкости над выпуклостью равна H. Какая вертикальная сила действует со стороны жидкости на выпуклый участок дна? Плотность жидкости равна ρ.

Л. Г. Маркович

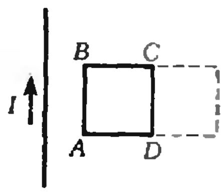


Рис. 2.

Ф940. Почему при кладке кирпичных печей для скрепления кирпичей используют глиняный раствор, а не, например, цементный (хотя он более твердый)?

В. А. Ильин

Ф941. В магнитном поле постоянного прямолинейного тока находится квадратная металлическая рамка $ABCD$ (рис. 2). Рамку переводят в новое положение, показанное на рисунке пунктиром. Это можно сделать двумя способами: равномерным поворотом вокруг стороны CD или равномерным параллельным переносом вдоль AD. При каком способе выделится больше тепла, если время перевода рамки в новое положение в обоих случаях одинаковое?

Л. Е. Шмитс

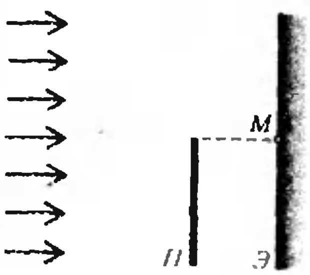


Рис. 3.

Ф942. Плоская световая волна падает нормально на экран $Э$. Как изменится освещенность экрана в точке M (рис. 3), если на пути волны поместить полубесконечную непрозрачную пластину $П$, параллельную экрану?

Д. А. Купцов

Problems

M926—M930; P938—P942

We have been publishing Kvant's contest problems every month from the very first issue of our magazine. The problems are nonstandard ones, but their solution requires no information outside the scope of the USSR secondary school syllabus. The more difficult problems are marked with a star (*). After the statement of the problem, we usually indicate who proposed it to us. It goes without saying that not all these problems are first publications. The solutions of problems from this issue (in

M926. Prove that

$$x^2+y^2=u^2+v^2=1,\ xu+yv=0$$

implies

$$x^2+u^2=y^2+v^2=1,\ xy+uv=0.$$

S. V. Duzhin

M927*. In the plane a finite set of points, no three of which are collinear, is chosen. Some line segments joining pairs of these points are drawn. We are allowed to change the segments in the following way: if, say, AC intersects BD, we can delete both, replacing them by

a) the segments AB and CD,

b) the segments AB and BC.

Russian or in English) may be posted no later than August 15th to the following address: USSR, Moscow, 103006 Москва К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант». Please send the solutions of physics and mathematics problems, as well as problems from different issues, under separate cover; on the envelope write the words: "KVANT'S PROBLEMS" and the numbers of all the solved problems; in your letter enclose an unstamped selfaddressed envelope — we shall use it to send you the correction results. At the end of the calendar year we sum up the results of the Kvant problem contest. If you have an original problem to propose for publication, please send it to us under separate cover, in two copies (in Russian or in English), including the solution. On the envelope write NEW PROBLEM IN PHYSICS (or MATHEMATICS).

(If a "new" segment has already been drawn, we don't have to draw it again.) Can we return to the initial set of segments by carrying out only changes of type a) or only of type b)?

V. E. Kolosov

M928. There are $N+1$ seats in a movie theatre. At first N people, possessing tickets supplied with seat numbers (including Igor), occupied N seats irrespective of numbers. But then the $(N+1)$ st ticket holder came, a very pedantic man. If his seat is occupied, he chases out the person sitting there, who then claims his own seat, eventually chasing out its occupant, and so on. What is the probability that Igor will not have to change his seat? (In other words, what is the ratio of the number of these dispositions of viewers in the theatre which are favorable to Igor to the total number of dispositions?)

I. B. Alekseev-Astafiev

M929. The natural numbers a, b, c, d, e satisfy the condition $a^4+b^4+c^4+d^4=e^4$. Prove that at least a) three of them are even, b) three are divisible by 5, c) two are divisible by 10.

V. D. Yakovlev

M930*. Numbers from 1 to 1985 are partitioned into 6 sets. Prove that one of them contains three numbers, one of which equals the sum of the two others (or two numbers, one of which is twice the other).

A. D. Valiev (9th form student)

P938*. The pilot of a spacecraft flying at velocity $v=1$ km/s observed an asteroid of diameter $d=7$ km directly on course when the distance to its surface was $l=8{,}5$ km. The cosmonaut immedialety turned on the emergency engines which, in negligeably short time, change the velocity by $\Delta v=300$ m/s, the direction of Δv being chosen by the cosmonaut. Can the spaceship avoid collision?

A. V. Andrianov

P939. The bottom of a vessel forms the angle $\alpha=45°$ with the horizontal plane. The bottom has a hemispherical convexity of radius R (Fig. 1). The height of the liquid above the convexity is H. What vertical force is exerted by the liquid on the convex part of the bottom? The density of the liquid is ρ.

L. G. Markovich

P940. When Russian brick stoves are constructed, the bricks are held together by clay rather than, say, cement, although the latter is stronger. Why?

V. A. Il'in

P941. A square mettallic frame $ABCD$ is placed in the magnetic field of a rectilinear DC conductor (Fig. 2). The frame is then moved to the new position shown by dotted lines on the figure. This can be done in two ways: by uniform rotation about CD or by uniform parallel translation along AD. For which of the two ways will the emitted heat be greater, if the time of motion is the same?

L. E. Shmits

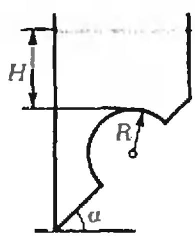


Fig. 1.

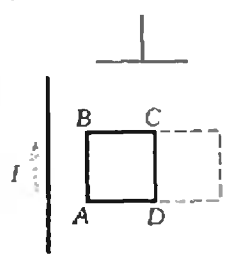


Fig. 2.

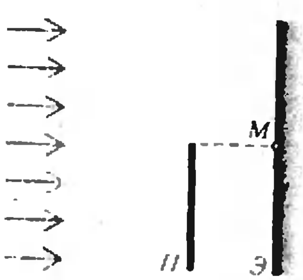


Fig. 3.

P942. A plane light wave falls perpendicularly on the screen $Э$. How will the luminosity of the screen at the point M change (Fig. 3) if a metal plate $П$ parallel to the screen, infinite in one direction, is placed in the way of the light wave?

D. A. Kuptsov

Решения задач

М905 — М910; Ф917 — Ф922.

М905. *Докажите, что уравнение $4x^n+(x+1)^2=y^2$ относительно натуральных чисел x и y: а) не имеет решений при $n=1$; б) имеет по крайней мере два решения при $n=2$; в)* имеет бесконечно много решений при $n=2$; г)* не имеет решений для натуральных $n\geqslant 3$.*

а) Уравнение $4x+(x+1)^2=y^2$ можно переписать в виде $(x+3)^2-y^2=8$ или

$$(x+3+y)(x+3-y)=8.$$

Поскольку $x+3+y\geqslant 5$, левая часть последнего равенства могла бы иметь только вид $8\cdot 1$, но и это невозможно, так как оба сомножителя $x+3+y$ и $x+3-y$, очевидно, числа одной четности.

б), в) Решим сразу задачу в). Перепишем данное уравнение $4x^2+(x+1)^2=y^2$ в виде $(5x+1)^2-5y^2=-4$ или

$$z^2-5y^2=-4, \qquad (1)$$

где $z=5x+1$. Нам надо доказать, что уравнение (1) имеет бесконечно много решений (z, y) в натуральных числах, причем число z должно давать при делении на 5 остаток 1. Нетрудно проверить прямым вычислением, что если (z, y) — такое решение, то и числа

$$\begin{aligned} z'&=161z+360y,\\ y'&=72z+161y \end{aligned} \qquad (2)$$

также удовлетворяют уравнению (1), причем z' при делении на 5 дает такой же остаток, как и z (в частности, остаток 1 при $z=5x+1$). Таким образом, остается указать хотя бы одно решение (1) с $z=5x+1$. Простейшее из таких решений — $(z_0, y_0)=(1, 1)$. Правда, ему отвечает $x_0=0$ (не натуральное число), но в дальнейшем пары (z, y), последовательно получаемые из (z_0, y_0) по формулам (2), уже будут давать решения исходной задачи: $z_1=161z_0+360y_0=521$ (или $x_1=104$), $y_1=72z_0+161y_0=233$ и т. д.

С первого взгляда приведенное решение кажется чрезвычайно искусственным. Однако на самом деле здесь был просто применен стандартный метод решения так называемого *уравнения Пелля* (частным случаем которого является наше уравнение (1)), описанный, например, в статье Н. Б. Васильева и В. Л. Гутенмахера «Пары чисел и действия с ними» (Квант, 1985, № 1, с. 20, 21).

г) Допустим, что данное уравнение имеет решение (x, y), тогда

$$4x^n=(y-x-1)(y+x+1).$$

Сомножители в правой части имеют одинаковую четность и, следовательно, четны. Пусть $y-x-1=2a$, тогда $y+x+1=2(a+x+1)$, то есть $x^n=$

$=a(a+x+1)$. Поскольку a и $a+x+1$ — взаимно простые числа (любой их общий делитель должен одновременно делить x^n и $x+1$), существуют такие натуральные числа u и v, что $a=u^n$, $a+x+1=v^n$, $x=uv$. Но тогда при $n\geqslant 3$

$$uv+1=x+1=v^n-u^n=$$
$$=(v-u)(v^{n-1}+v^{n-2}u+\ldots+u^{n-1})>1+vu+1.$$

Полученное противоречие показывает, что исходное уравнение решений не имеет.

М. Гараев, В. Н. Дубровский

◆

M906. *а) Докажите, что при любом натуральном $a>1$ уравнение*

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{a}$$

имеет по крайней мере три решения в натуральных числах x и y.
б) Найдите число натуральных решений этого уравнения при $a=1985$.

а) Решениями данного уравнения при любом натуральном a являются пары натуральных чисел $(2a,\ 2a)$, $(a+1,\ a(a+1))$ и $(a(a+1),\ a+1)$.

б) Ответ: при $a=1985$ данное уравнение имеет 9 решений. Покажем, что уравнение

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{a}$$

имеет столько решений, сколько делителей у числа a^2. (При $a=1985=5\cdot 397$ число делителей a^2 равно 9, так как любой из них можно представить в виде $5^n\cdot 397^k$, где n и k независимо принимают любое из трех значений 0, 1, 2.)

Для доказательства достаточно переписать наше уравнение в виде $ay+ax=xy$ или

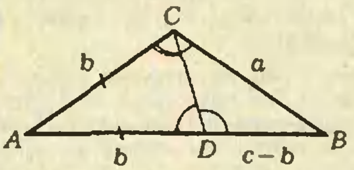
$$a^2=(x-a)(y-a),$$

и заметить, что количество разложений числа a^2 на два сомножителя равно числу его делителей.

М. В. Славинский, А. Ю. Вайнтроб

◆

M907. *Про треугольник ABC с длинами сторон $a=BC$, $b=AC$, $c=AB$ известно, что $3\angle A+2\angle B=180°$. Докажите, что $a^2+bc-c^2=0$.*



Доказываемое соотношение удобно переписать в виде равенства отношений отрезков

$$\frac{a}{c}=\frac{c-b}{a}. \qquad (*)$$

Теперь его можно доказывать с помощью подобных треугольников. Возьмем на стороне AB такую точку D, что $AD=b$ (а $DB=c-b$; см. рисунок). Равенство (*) — это условие пропорциональности сторон треугольников ABC и CBD, заключающих общий угол B этих треугольников, поэтому достаточно доказать, что эти треугольники подобны, то есть что, например, углы ACB и CDB равны. Имеем

$$\angle CDB=180°-\angle ADC=180°-\frac{180°-\angle A}{2}=$$
$$=180°-(\angle A+\angle B)=\angle ACB.$$

(Мы воспользовались тем, что треугольник ACD равнобедренный и данным соотношением $3\angle A+2\angle B=180°$.)

Т. А. Джортменадзе

M908. *На стороне AB треугольника ABC выбирается точка P, и через нее проводятся прямые, параллельные BC и AC, до пересечения со сторонами AC и BC соответственно в точках M и N. При каком выборе точки P отрезок MN имеет наименьшую длину?*
Решите эту задачу а) для треугольника с прямым углом C; б) для произвольного треугольника ABC.*

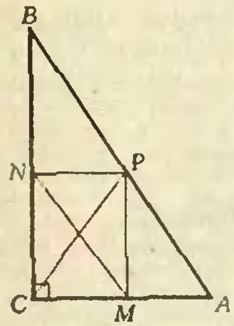


Рис. 1.

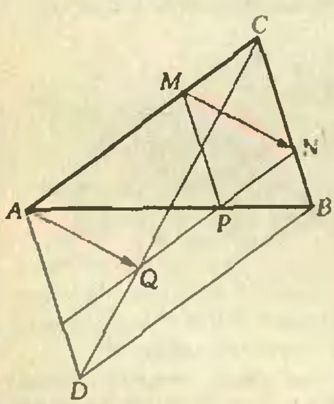


Рис. 2.

а) Ответ: точка P должна быть основанием высоты треугольника ABC. Действительно, в случае, когда угол C прямой (рис. 1), параллелограмм $CMPN$ является прямоугольником. Следовательно, $MN=CP$, а отрезок CP имеет наименьшую длину, когда он перпендикулярен к AB.

б) Мы начнем решать задачу вполне стандартным способом: введем параметр $x\equiv AP/AB$ $0<x<1$, и выразим вектор $\overrightarrow{MN}$ через $\overrightarrow{CA}$ и $\overrightarrow{CB}$, чтобы записать затем его длину как функцию от x и найти наименьшее значение этой функции. Однако, как мы увидим, получающиеся векторные соотношения сами подсказывают более простое и по существу «чисто геометрическое» завершение решения.

Из гомотетичности треугольников BPN и BAC, APM и ABC (рис. 2) следует, что $CN/CB=AP/AB=x$, то есть $\overrightarrow{CN}=x\overrightarrow{CB}$, $CM/CA=BP/BA=1-x$, то есть $\overrightarrow{CM}=(1-x)\overrightarrow{CA}$ и (см. рис. 2)

$$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{CN}-\overrightarrow{CM}=x\overrightarrow{CB}-(1-x)\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{AC}+x(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB})=\overrightarrow{AC}+x\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AQ}$$

где $\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}$, а точка Q определяется условием $\overrightarrow{CQ}=x\overrightarrow{CD}$. Когда точка P пробегает отрезок AB, параметр x меняется от 0 до 1, а точка Q пробегает отрезок CD. Следовательно, длина $MN=AQ$ будет минимальна, когда Q — ближайшая к A точка отрезка CD. Чтобы найти отвечающее этой точке положение точки P, заметим, что $\overrightarrow{QN}=\overrightarrow{AM}$ (так как $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{AQ}$), а значит, Q лежит на прямой, проходящей через N параллельно прямой AM, то есть на прямой PN.

Итак, ответ к нашей задаче можно сформулировать так: достроим данный треугольник до параллелограмма $ACBD$; найдем на его диагонали CD точку Q, ближайшую к A, и проведем через нее прямую, параллельную стороне AC; точка пересечения этой прямой со стороной AB и есть искомая точка P. В частности, если оба угла ACD и ADC острые, то Q — это проекция точки A на CD; если ACD — не острый угол, то $Q=C$, а $P=A$, если же ADC — не острый угол, то $Q=D$, а $P=B$.

В. Н. Дубровский, Э. Г. Готман

◆

M909. *а) Докажите, что существует арифметическая прогрессия из 4 различных членов, содержащая только степени натуральных чисел $n^k (k\geqslant 2)$.*
Существует ли такая прогрессия из
б) любого конечного числа,
в) бесконечного числа членов? Существует ли бесконечная (не постоянная) арифметическая прогрессия, не содержащая

а) Приведем пример нужной прогрессии: 73^2, $5^2\cdot 73^2$, $7^2\cdot 73^2$, 73^3. В пункте б) решения объяснено, как строится этот и другие, ему подобные, примеры.

б) Ответ: да, существует. Покажем, как по прогрессии $a_1, \ldots, a_m$ длины $m (m\geqslant 2)$ из степеней натуральных чисел можно построить прогрессию из степеней длины $m+1$. Пусть разность данной прогрессии равна d и $a_i=n_i^{k_i}$, $i=1, \ldots, m$. Припишем к нашей прогрессии ее следующий член $b=a_m+d$ и умножим все числа $a_1, \ldots, a_m$, b на b^k, где k —

г) ни одной степени натурального числа,
д) ни одного числа, составленного из одинаковых цифр?

наименьшее общее кратное показателей $k_1, \ldots, k_m$. Полученная последовательность из $m+1$ чисел

$$a_1 b^k, \ldots, a_m b^k, b^{k+1},$$

очевидно, является арифметической прогрессией с разностью $d \cdot b^k$, причем все ее члены — степени натуральных чисел (так как $a_i b^k = (n_i b^{k/k_i})^{k_i}$). Таким образом, например, любую пару степеней можно «нарастить» до прогрессии любой заданной длины. Пример в пункте а) получен из прогрессии 1, 25, 49.

в) Ответ: не существует. Приведем доказательство, основанное на рассмотрении ряда из чисел, обратных к членам прогрессии.

Заметим, что *для любой бесконечной арифметической прогрессии* $a_1, \ldots, a_m, \ldots$ *из натуральных чисел сумма*

$$S_m = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_m}$$

с ростом m *неограниченно возрастает.*

Действительно, поскольку $a_{i+1} \leqslant (a_1 + d)i = a_2 i$ при $i = 1, 2, \ldots$, где d — разность прогрессии,

$$S_m \geqslant \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2}\left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{m-1}\right) = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} \cdot s_{m-1}.$$

Одно из обычных доказательств неограниченного возрастания суммы s_m состоит в следующем: пусть $2^k < m < 2^{k+1}$, тогда

$$s_m > 1 + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7}\right) + \ldots$$
$$\ldots + \left(\frac{1}{2^{k-1}} + \ldots + \frac{1}{2^k - 1}\right) > 1 + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) +$$
$$+ \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{2^{k-1}} + \ldots + \frac{1}{2^{k-1}}\right) =$$
$$= k > \log_2 m - 1.$$

Теперь покажем, что *для любого набора (без повторений) степеней натуральных чисел сумма обратных к ним величин не превосходит* 2.

Числа, обратные к степеням (не ниже второй) данного натурального числа n, образуют бесконечную геометрическую прогрессию со знаменателем $1/n$ и первым членом $1/n^2$. Их сумма (при $n > 1$) равна

$$A_n = \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3} + \ldots = \frac{1}{n^2} \frac{1}{1 - 1/n} = \frac{1}{n(n-1)}.$$

Пусть наибольшее число, степень которого входит в данный набор степеней, равно m. Тогда сумма чисел, обратных к этим степеням, не превосходит

$$1 + A_2 + A_3 + \ldots + A_m = 1 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \ldots + \frac{1}{(m-1)m} =$$
$$= 1 + \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{m-1} - \frac{1}{m}\right) = 2 - \frac{1}{m} < 2,$$

что и требовалось доказать.

Из двух доказанных утверждений, очевидно, вытекает, что составить бесконечную арифметическую прогрессию из степеней натуральных чисел невозможно.

Другое решение задачи опирается на то, что доля, которую составляют члены произвольной арифметической прогрессии с разностью d среди первых n натуральных чисел, с ростом n приближается к $1/d$, а доля, составляемая среди тех же чисел всевозможными степенями натуральных чисел, стремится к 0.

Читатель без труда восстановит детали этого решения, ознакомившись с решением задачи М783 (Квант, 1982, № 8, с. 35).

г), д) **Ответ** к обеим задачам г) и д): существует. Из разнообразных примеров мы выбрали такой, который годится сразу для обеих задач — прогрессию 10, 30, 50, ... Ее n-й член $a_n=-10+20n=(2n-1)\cdot 10$ при любом n оканчивается ровно одним нулем и, следовательно, не может быть степенью натурального числа (так как делится на 10, но не делится на 10^2) и не состоит из одинаковых цифр.

Р. Н. Азизян, Н. Б. Васильев

◆

М910. *На сторонах правильного шестиугольника взяты точки $A_1, A_2, \ldots, A_6$ (рис. 1). Известно, что три попарно не смежные стороны шестиугольника $A_1 \ldots A_6$ (A_1A_2, A_3A_4, A_5A_6) определяют треугольник KLM, вершины которого лежат на продолжениях диагоналей правильного шестиугольника. Докажите, что это верно и для трех других сторон шестиугольника $A_1 \ldots A_6$.*

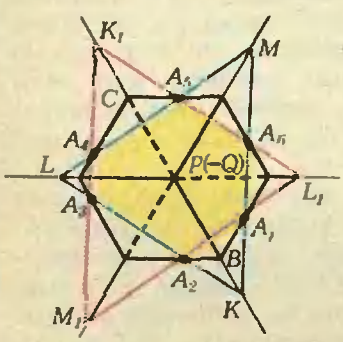


Рис. 1.

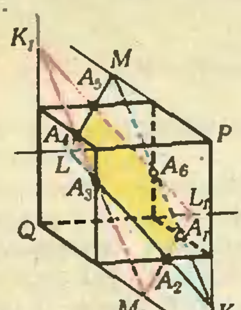


Рис. 2.

Рассмотрим данный правильный шестиугольник как ортогональную проекцию куба вдоль его диагонали PQ. Возьмем на продолжениях ребер куба, выходящих из вершины P, по точке так, чтобы эти точки проектировались в точки K, L, M (на рисунке 2 они обозначены теми же буквами K, L, M). Тогда, очевидно, сечение куба плоскостью KLM будет шестиугольником, который при проекции переходит в шестиугольник $A_1 \ldots A_6$. Пусть K_1, L_1, M_1 — точки пересечения этой плоскости с продолжениями ребер, выходящих из вершины Q, тогда и в пространстве (рис. 2) и на проекции (рис. 1) отрезки A_2A_3, A_4A_5 и A_6A_1 будут лежать на сторонах треугольника $K_1L_1M_1$, откуда и следует утверждение задачи.

Из проведенного рассуждения видно, что противоположные стороны шестиугольника $A_1 \ldots A_6$ параллельны (плоскость сечения пересекает противоположные грани куба по параллельным прямым). Это можно вывести и непосредственно из условия: например, треугольники BA_1A_2 и PML на рисунке 1 гомотетичны с центром гомотетии K ($KA_1:KM=KB:KP=KA_2:KL$) и, следовательно, $A_1A_2 \| A_4A_5$. Отсюда в свою очередь вытекает, что треугольники CA_4A_5 и PM_1L_1 (где M_1 и L_1 — точки пересечения прямых A_4A_3 и A_5A_6 с A_1A_2) тоже гомотетичны, как треугольники с соответственно параллельными сторонами, а значит, прямые A_3A_4, A_5A_6 и BC пересекаются в одной точке — центре гомотетии. Рассматривая аналогичным образом две другие пары противоположных сторон шестиугольника $A_1 \ldots A_6$, мы получим другое решение задачи, не использующее «выход в пространство».

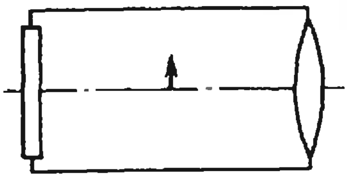
С. Ю. Оревков, В. Н. Дубровский

◆

Ф917. *Предмет находится между линзой и плоским зеркалом, перпендикулярным главной оптической оси линзы. Зеркало, линза и предмет заключены в кожух из светопроницаемой матовой пластмассы. Такая система создает два изображения предмета и изображение линзы. Оба изображения предмета имеют*

Линза создает изображение предмета, а также изображение его отражения в зеркале. Поскольку предмет и его изображение в зеркале имеют одинаковые размеры, но находятся на различных расстояниях от линзы, их изображения, создаваемые линзой, не могут иметь одинаковые размеры, если они оба являются действительными или оба мнимыми. В самом деле, для действительного изображения мы можем написать фор-

одинаковые размеры независимо от расстояния между линзой и предметом. С каким увеличением изображается линза?



мулу линзы:

$$\frac{1}{F}=\frac{1}{d}+\frac{1}{f},$$

где F — фокусное расстояние линзы, d — расстояние между линзой и предметом, f — расстояние между линзой и изображением. Поскольку увеличение определяется формулой $\Gamma=f/d$, то, исключая с помощью формулы линзы f, получаем

$$\Gamma=\frac{F}{d-F}. \qquad (1)$$

Для мнимого изображения формула линзы принимает вид

$$\frac{1}{F}=\frac{1}{d}-\frac{1}{f},$$

а увеличение задается выражением

$$\Gamma=\frac{F}{F-d}. \qquad (2)$$

Если мы обозначим через d_1 расстояние от предмета до линзы, через Γ_1 — увеличение, с которым линза изображает этот предмет, через d_2 — расстояние от линзы до изображения предмета в зеркале и через Γ_2 — увеличение, с которым линза изображает это отражение, то с помощью формул (1) и (2) нетрудно увидеть, что если изображения, создаваемые линзой, оба действительные или оба мнимые, то условие $\Gamma_1=\Gamma_2$ выполнить невозможно.

Остается предположить, что одно изображение является действительным, а другое — мнимым. Очевидно, что мнимым будет изображение предмета, поскольку он находится ближе к линзе, а изображение его отражения — действительным. Тогда, в соответствии с формулами (1) и (2), мы можем написать:

$$\Gamma_1=\Gamma_2 \Rightarrow F-d_1=d_2-F. \qquad (3)$$

Но расстояние от линзы до изображения предмета в зеркале равно $d_2=2a-d_1$, где a — расстояние от линзы до зеркала. Тогда из (3) получаем $a=F$, то есть зеркало расположено в фокальной плоскости линзы. Линза создает изображение собственного отражения в зеркале. Но это отражение имеет те же размеры, что и линза, и расположено на расстоянии $d=2F$ от нее. Следовательно, согласно формуле (1), линза создает действительное изображение своего отражения в зеркале с увеличением $\Gamma=1$.

П. Кузнецов

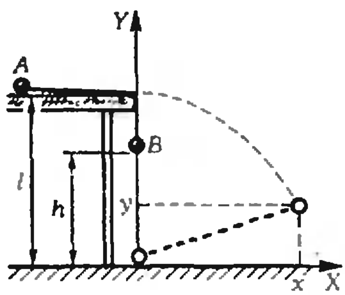
◆

Ф918. *Пара одинаковых грузиков A и B, связанных невесомой нитью длины l, начинает соскальзывать с гладкого стола высоты l, причем в начальный момент грузик B находится на высоте h=2l/3 от*

Скорость грузика A непосредственно перед тем моментом, когда он начнет соскальзывать со стола, находим с помощью закона сохранения энергии:

$$2m\,\frac{v_0^2}{2}=mgh=\frac{2}{3}mgl,$$

пола (см. рисунок). Достигнув пола, грузик B прилипает к нему; грузик A в этот момент слетает со стола. На какой высоте над уровнем пола будет грузик A, когда нить вновь окажется натянутой?



откуда

$$v_0=\sqrt{\frac{2}{3}gl}. \qquad (1)$$

Теперь убедимся в том, что эта скорость мала для того, чтобы в дальнейшем нить была натянута. Действительно, в этом случае грузик A стал бы двигаться по окружности радиуса l; центростремительное ускорение в верхней точке, равное v_0^2/l, должно было бы обеспечиваться суммой силы тяжести mg и силы натяжения нити T:

$$m\frac{v_0^2}{l}=mg+T. \qquad (2)$$

Подставив в (2) значение v_0 из (1), получим: $T=-mg/3$, что не имеет смысла (такое движение было бы возможно, если бы вместо нити был жесткий стержень). Следовательно, соскользнув со стола, грузик A в дальнейшем будет двигаться по параболе.

Используя систему координат, изображенную на рисунке, запишем координаты грузика в момент времени t:

$$x=v_0t,\ y=l-\frac{gt^2}{2}. \qquad (3)$$

Нить вновь будет натянута, когда будет выполняться соотношение

$$x^2+y^2=l^2. \qquad (4)$$

Подставив в (4) выражения для координат из (3), получим уравнение для определения того момента времени, когда нить вновь будет натянута:

$$v_0^2t^2+\left(l-\frac{gt^2}{2}\right)^2=l^2,$$

или, с учетом (1),

$$gt^2\left(\frac{gt^2}{4}-\frac{1}{3}l\right)=0,$$

откуда $t^2=4l/3g$ (корень $t=0$ соответствует моменту соскальзывания грузика A со стола). Подставляя это значение t^2 в выражение для координаты y (см. (3)), находим искомую высоту:

$$y=\frac{1}{3}l.$$

Г. Л. Коткин

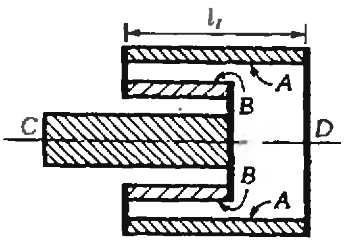
◆

Ф919. *На рисунке показано долевое сечение прибора, используемого в качестве эталона длины. Центральный стержень C и внешняя оболочка A прибора сделаны из материала с коэффициентом теплового расширения α_1; их длины при $t_1=20$ °C одинаковы и равны l_1. Внутренняя труба B сделана из материала с коэффициентом теплового расширения α_2. Какой должна быть*

Пусть при температуре $t_0=0$ °C центральный стержень C и внешняя оболочка A имеют длину l_{10}, а внутренняя труба B — длину l_{20}. Тогда

$$l_1=l_{10}(1+\alpha_1t_1)\Rightarrow l_{10}=l_1/(1+\alpha_1t_1),$$
$$l_2=l_{20}(1+\alpha_2t_1)\Rightarrow l_{20}=l_2/(1+\alpha_2t_1),$$

где l_2 — искомая длина трубы B при температуре $t_1=20$ °C. При изменении температуры от t_0 до t_1 длины соответствующих деталей изменились *длина внутренней трубы при $t_1=20$ °С, чтобы при изменении температуры полная длина эталона (CD) не менялась?*



на

$$\Delta l_1=l_1-l_{10}=l_{10}\alpha_1 t_1,$$
$$\Delta l_2=l_2-l_{20}=l_{20}\alpha_2 t_1.$$

Конструкция эталона такова, что при любом изменении температуры изменение длины трубы B должно компенсировать суммарное удлинение деталей A и C. Следовательно, должно выполняться условие $\Delta l_2=2\Delta l_1$, то есть

$$l_{20}\alpha_2 t_1=2l_{10}\alpha_1 t_1.$$

Подставляя в это равенство записанные выше выражения для l_{10} и l_{20}, находим l_2:

$$l_2=2l_1\,\frac{\alpha_1(1+\alpha_2 t_1)}{\alpha_2(1+\alpha_1 t_1)}\approx 2l_1\,\frac{\alpha_1}{\alpha_2}.$$

А. П. Ершов

◆

Ф920. *Через трубку переменного сечения продувают воздух. Входное отверстие трубки имеет площадь S_1, выходное — S_2. На входе скорость воздуха v_1, температура — T_1, давление — p_1; на выходе температура воздуха T_2, давление — p_2. Какова скорость воздуха на выходе?*

Объем воздуха, входящего в трубку за время t, равен $V=S_1 v_1 t$. Объем выходящего за то же время воздуха равен $V_2=S_2 v_2 t$, где v_2 — искомая скорость воздуха на выходе. Так как скорости v_1 и v_2 не меняются со временем, массы входящего и выходящего воздуха одинаковы. Поэтому, согласно объединенному газовому закону,

$$\frac{p_1 V_1}{T_1}=\frac{p_2 V_2}{T_2}\Rightarrow V_2=V_1\,\frac{p_1 T_2}{p_2 T_1},$$

то есть

$$S_2 v_2 t=S_1 v_1 t\,\frac{p_1 T_2}{p_2 T_1}.$$

Отсюда находим v_2:

$$v_2=v_1\,\frac{S_1 p_1 T_2}{S_2 p_2 T_1}.$$

Г. Л. Коткин

◆

Ф921. *Плоский конденсатор подключен к источнику напряжения U. Пластины конденсатора имеют площадь S каждая, расстояние между пластинами равно d_1. К одной пластине прижата металлическая пластинка площади S и толщины d_2 (рис. 1), имеющая массу m. Пластинку отпускают. С какой скоростью она ударится о другую пластину конденсатора? Влиянием силы тяжести пренебречь.*

На рисунке 1 показано распределение зарядов в системе в начальный момент времени t_0. Под действием силы притяжения со стороны заряда $-q_0$ пластины 2 пластинка, когда ее отпустят, начнет двигаться с ускорением по направлению к пластине 2. На рисунке 2 показано положение системы в момент времени t, когда пластинка ударяется о пластину 2.

Обозначим скорость пластинки в момент удара v. Чтобы найти v, воспользуемся законом сохранения энергии.

В момент t_0 энергия W_0 системы конденсатор + пластинка равна энергии конденсатора, заряженного до разности потенциалов U; расстояние между пластинами этого конденсатора равно d_1-d_2, и его емкость — $C_0=\varepsilon_0 S/(d_1-d_2)$. Так что

$$W_0=C_0\,\frac{U^2}{2}.$$

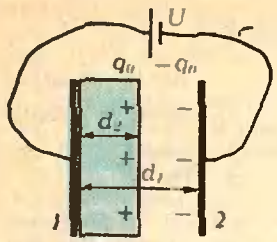


Рис. 1.

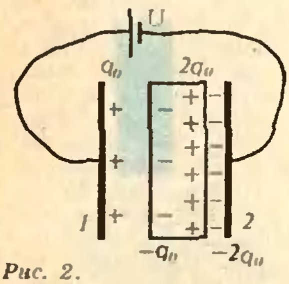


Рис. 2.

В момент времени t энергия системы равна

$$W=C_0\frac{U^2}{2}+m\frac{v^2}{2}=W_0+m\frac{v^2}{2}.$$

Откуда взялась дополнительная энергия $mv^2/2$?

За время движения пластинки от пластины *1* до удара о пластину *2* между обкладками конденсатора прошел заряд q_0. Такой же заряд прошел через источник. Значит, источник совершил работу $A=q_0U$. Эта работа и пошла на сообщение пластинке энергии $mv^2/2$.

Итак,

$$m\frac{v^2}{2}=q_0U=C_0U^2=\frac{\varepsilon_0 S}{d_1-d_2}U^2.$$

Отсюда находим v:

$$v=U\sqrt{\frac{2\varepsilon_0 S}{m(d_1-d_2)}}.$$

А. П. Ершов

◆

Ф922. *Фотографируя муравья с близкого расстояния, экспериментатор использовал удлинительное кольцо, которое увеличило расстояние от пленки до объектива на $\Delta l=7{,}5$ мм. Резкое изображение муравья получилось в том случае, когда на шкале объектива было установлено расстояние $b=1{,}05$ м (на шкале указываются значения расстояний от предмета до объектива без использования удлинительных колец). Фокусное расстояние объектива $F=50$ мм. На каком расстоянии от объектива находился муравей? Считать объектив тонкой линзой.*

Из условия задачи следует, что без использования удлинительного кольца на пленке будет получаться резкое изображение предмета, находящегося от объектива на расстоянии $b=1{,}05$ м. Это позволяет определить по формуле линзы расстояние между объективом (без кольца) и пленкой:

$$\frac{1}{F}=\frac{1}{b}+\frac{1}{f}\Rightarrow f=\frac{Fb}{b-F}=5{,}25\text{ см}.$$

При фотографировании с кольцом расстояние между объективом и пленкой было $f'=f+\Delta l=6$ см. Воспользовавшись вновь формулой линзы, найдем, на каком расстоянии b' от объектива (с кольцом) находился муравей:

$$\frac{1}{F}=\frac{1}{b'}+\frac{1}{f'}=\frac{1}{b'}+\frac{1}{f+\Delta l},$$

откуда

$$b'=\frac{F(f+\Delta l)}{f+\Delta l-F}=30\text{ см}.$$

А. П. Ершов

Поправка

В «Кванте» № 4 на с. 54 в левой колонке в знаменателе второй дроби в условии задачи 1 варианта 1 должно быть

$$kx^2+2xy+ky^2.$$

На с. 55 в верхней строке левой колонки вместо $9x$ должно быть 9^x; условие задачи 1 варианта 6 должно заканчиваться фразой: «Найти скорости поездов».

Список читателей приславших правильные решения

Большинство читателей, приславших решения задач М881 — М895, Ф893 — Ф907, справились с задачами М881, М882, М887 — М893, Ф898, Ф905. Ниже мы публикуем фамилии тех, кто прислал правильные решения остальных задач (цифры после фамилии — последние цифры номеров решенных задач).

Математика

Н. Агазарян (Абовян) 83, 84, 94, 95; М. Александров (Москва) 83, 85, 95; Р. Алексеев (Петродворец) 94; Я. Алиев (Баку) 83, 84; Г. Андреева (Пермь) 86, 94; А. Асрян (с. Грибоедов Арм. ССР) 83, 84, 86, 94; Р. Бабаев (Баку) 83, 84; М. Байрамов (Баку) 83, 84; А. Барабаш (Киев) 83—85; В. Барзыкин (п. Черноголовка Московской обл.) 83, 84; М. Барон (Ленинград) 83, 84; Н. Безденежных (Нижний Тагил) 94; Ю. Бекетов (Ленинград) 83; И. Бирман (Донецк) 83, 86; А. Ваганов (Гатчина) 83, 84; С. Велесько (Минск) 83—85, 94; Э. Велиметов (Баку) 83, 84, 94; И. Верный (Киев) 85; Л. Вертгейм (Новосибирск) 84, 86, 94, 95; Р. Видгоп (Баку) 83, 84; В. Викторов (п. Чимишлия МССР) 83, 84; И. Воронков (Гатчина) 83, 84, 94; Т. Газарян (Ереван) 83—86, 94, 95; Д. Гамарник (Тбилиси) 84, 94; А. Гарибян (Октемберян) 94; Р. Гендлер (Ташкент) 83—85, 94; О. Геупель (Дрезден, ГДР) 86, 94, 95; Д. Гехтман (Киев) 83—85; В. Годлевский (Киев) 83—85, 94; Л. Гольдштейн (Киев) 83; В. Городницкий (Днепропетровск) 83; Н. Григорьева (Андропов) 83, 84, 94; А. Давтян (п. Мецамор Арм. ССР) 83—85, 94, 95; Ю. Дейкало (Киев) 83, 84; С. Демьянченко (Москва) 83, 84, 94; Джафаров (Баку) 94; В. Дзюба (Одесса) 84, 85; А. Дынников (Жуковский) 83—86, 94; К. Дынников (Жуковский) 83, 84, 86, 94; В. Елистратов (Донецк) 83, 84, 94; В. Журавлев (Гайворон) 83, 84, 94; С. Зейналов (Баку) 94; Л. Зосин (Киев) 83—85; А. Иванов (Первомайск Николаевской обл.) 94; М. Йорданов (Враца, НРБ) 83; В. Канашевич (Киев) 83, 84; В. и И. Каповичи (Хабаровск) 83—85, 94; А. Каринский (Невинномысск) 83—86, 94; П. Кирилин (Дубна) 83, 84, 86, 94; О. Кирнасовский (Винница) 83, 84, 94; А. Киселев (Ленинград) 83—85, 94; Т. Кобдиков (Павлодар) 83—85; М. Колодин (Ленинград) 83; К. Копотун (Киев) 83; А. Корсунский (Киев) 84; Н. Крылов (Ленинград) 83, 94; М. Куриный (Харьков) 83—85, 94; А. Кухарский (Киев) 83, 85, 94; Н. Кушлевич (Москва) 83; С. Кярас (Молетай) 83, 84, 86, 94; С. Лаусмаа (Кохтла-Ярве) 84; Л. Леняшин (Ленинград) 83; А. Липай (Минск) 94; А. Литвак (Ленинград) 94; В. Ляндин (Белорецк) 94; И. Макаров (Новокузнецк) 84, 94; М. Макаров (Севастополь) 83, 84, 94; Д. Малышев (Москва) 94; Ю. Махлин (Москва) 83, 84, 94; С. Мигушов (Москва) 94; С. Минаев (Свердловск) 83, 84; Т. Мисирпашаев (Москва) 83, 84, 86, 94, 95; А. Молотков (Ленинград) 83, 84, 94; В. Морозов (Пущино) 83; Д. Музаффаров (п. Герматук Аз. ССР) 94; М. Мунькин (Алма-Ата) 84; Т. Мурашов (Ленинград) 84; Е. Мухин (Кинешма) 94; О. Никифорчин (Ивано-Франковск) 84; С. Пичнихин (Москва) 83; Т. Поликарпова (Белорецк) 94; М. Померанцев (Черкассы) 94; Т. Попова (Челябинск) 83; Т. Радько (Корсунь-Шевченковский) 83—86, 95; М. Ровинский (Москва) 94; А. Розанов (Киев) 84; А. Ройтерштейн (Ленинград) 83; Е. Романов (Димитровград) 83, 84; А. Ростов (Винница) 84; Ю. Рыбалочка (Киев) 84; И. Самовол (Гайворон) 83, 84, 94; К. Семенов (Киев) 83—85, 94; Р. Сибилёв (Ленинград) 83—85, 94; Д. Сиваќов (Воскресенск) 83, 84; В. Сизый (Киев) 84, 94; А. Смирнов (Ленинград) 85; М. Соколова (Ленинград) 83; Г. Спивак (Киев) 84, 85; С. Старцев (Уфа) 84; К. Стыркас (п. Черноголовка Московской обл.) 94; В. Судаков (Тбилиси) 83, 84, 94; М. Тейтель (Киев) 83—85; Ю. Томилов (Винница) 83, 84, 86, 94; А. Трухан (Минск) 84; В. Тульчинский (Киев) 83, 84; Е. и Т. Уклистые (Астрахань) 86; Н. Федин (Омск) 84; Н. Филонов (Ленинград) 83—86, 94, 95; Т. Хилкова (Щербинка) 83, 94; М. Хованов (Москва) 83; Д. Хосид (Алма-Ата) 84; А. Цирс (Апатиты) 85; С. Чебуков (Симферополь) 83, 84; А. Череватый (Киев) 83, 84, 94; Ю. Шамрук (д. Новый Двор Гродненской обл.) 83; А. Шанин (Москва) 84; С. Шейнин (Молодечно) 84; А. Ширинкин (Березники) 94; Б. Шраср (Ленинград) 83; С. Штейнгольд (Москва) 94; Е. Юдицкий (Киев) 84—86, 94; Д. Якобсон (Москва) 83, 84, 94.

Физика

А. Абанов (Красноярск) 93, 99, 00, 04—06; И. Абрамчук (Винница) 99, 02; А. Агаев (с. Шарафа Аз. ССР) 93, 95, 96, 99, 01; В. Апальков (Харьков) 93, 95—97, 99, 01, 02, 06, 07; В. Барзыкин (п. Черноголовка Московской обл.) 93, 95—02; К. Баталин (Нижний Тагил) 03; Н. Баталин (Новосибирск) 96; Г. Бахов (Баку) 04; Б. Баяраа (Улан-Батор, МНР) 95; А. Белопольский (Киев) 93; С. Беловолов (Красноярск) 04; И. Бена (Васлуй, СРР) 93—97, 00—04, 06, 07; Э. Бондаренко (Полтава) 93, 95—02, 06, 07; Д. Боровский (Ульяновск) 93, 94; Ю. Боровский (Киев) 93, 96, 99, 00, 04, 07; Р. Боташев (Фрунзе) 95, 96, 02; М. Будаев (Улан-Батор, МНР) 96, 02, 06; В. Бурлак (Винница) 99, 02; А. Васильев (Красноярск) 99, 03; О. Васильев (Алма-Ата) 93, 95, 96, 99—01, 06, 07; Д. Вент (Тула) 99, 06; С. Винтовкин (Свердловск) 93, 02, 04, 06; А. Воротняк (Киев) 00; Ю. Воронов (Москва) 03; И. Гаврик (Часов Яр) 96, 99, 04; К. Галочкин (Ташкент) 00; В. Галухин (Рязань) 94, 95, 97, 99—04, 06, 07; А. Глухов (Саратов) 93—02; М. Годин (Ленинград) 97; Л. Гольдштейн (Киев) 93, 95, 96, 99, 03, 04; Г. Горбатенко (Арзамас) 04, 06; М. Готман (Киев) 96, 07; Л. Гринберг (Алма-Ата) 95, 96, 07; Э. Гукасян (Баку) 04; В. Гусев (Красноярск) 96, 01, 02, 04, 06, 07; А. Дода (Корсунь-Шевченковский) 96, 99; С. Дубовик (Брест) 93, 00, 06; В. Душацкий (Киев) 03; А. Еренбург (Запорожье) 01; С. Ефремов (Запорожье) 93, 97, 02; Р. Зайнуллин (с. Сарманат Оренбургской обл.) 93, 95, 96; В. Зелов (Алма-Ата) 96; В. Калацкий (Солигорск) 96, 99; А. Карнаухов (Устинов) 04; В. Кирьяшкин (Саратов) 95; А. Кирьянов (Киев) 03; А. Киселев (Ленинград) 93, 95; П. Кларк (Тула) 93, 00, 02; А. Климачев (Минск) 93, 95—02, 04, 06, 07; П. Климкин (Киев) 96; Г. Климович (п. Болшево Московской обл.) 93—02; А. Кноп (Винница) 95, 97, 00, 02; Б. Король (Киев) 99, 02; Х. Королев (Горький) 04; Я. Корчевский (Киев) 96; В. Костенко (Киев)

(Окончание см. на с. 56)

КВАНТ УЛЫБАЕТСЯ

Что написано на конденсаторе?

(из ответов на экзаменах)

— Расскажите об устройстве и принципе работы приемника А. С. Попова.

— Основным элементом приемника А. С. Попова является ребратор Гука.

— ?!

— Это ротор, наполненный металлическими опилками, который в момент приема сигнала сперва ударяет по контуру, а потом по лампе. Благодаря этому возникает звук.

— И много весит этот «ребратор Гука»?

— Не очень. Примерно 800—900 кг.

— Ну, допустим, контур приемника такой удар выдержит, но ведь стеклянная лампа наверное разобьется?

— И бились. Но наука нашла выход из этого положения. Лампу заменили транзистором.

* * *

— Что такое звук?

— Звук — это колебание ушей.

* * *

— Как определить скорость звука?

— Для определения скорости звука необходимо одно ухо приложить к рельсу, а по другому ударить.

* * *

— Каково назначение трансформатора?

— Трансформатор — это прибор, который преобразует переменный ток в равномерный и прямолинейный.

* * *

— Из каких основных частей состоит любая тепловая машина?

— Основной частью любой тепловой машины является ее оболочка.

* * *

— Как вы себе представляете свободное падение тела?

— Возьмем какое-либо тело и бросим его вверх. Там оно на несколько минут остановится, а затем медленно начнет падать вниз.

* * *

— В каких единицах измеряется электроемкость конденсатора?

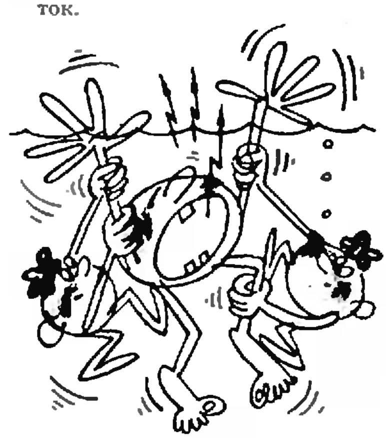
— ??

— Ну, хорошо. Вы взяли в руки конденсатор. Что на нем написано?

— Как что? Цена!

— Какова природа электрического тока в электролитах?

— Возьмем молекулу натрий хлор и опустим ее в воду. На нее сразу же набросятся молекулы воды и станут ее растягивать до тех пор, пока не получится электрический ток.



— Для того чтобы мотор не портился, его макают в масло.

* * *

— Кипение — это бурление жидкости.

* * *

— Вода из банки не выливается, так как в ней еще остался кусочек атмосферы.

Собрал Л. А. Бирюков

Задачи вступительных экзаменов в различные вузы в 1984 году

Предлагаем подборку задач вступительных экзаменов по математике и физике в некоторые университеты — Белорусский (1), Воронежский (2), Донецкий (3), Киевский (4), Омский (5), Ташкентский (6), Уральский (7) и институты — Горьковский политехнический (8), Ленинградский технологический (9), Рижский политехнический (10), Томский политехнический (11), Тбилисский педагогический (12), II Московский медицинский (13), Минский радиотехнический (14).

Математика

Письменный экзамен

Алгебра

1. (5) Дано натуральное число. Если к его цифровой записи справа приписать цифру 2, то получится число, которое делится без остатка на 9. При этом частное от деления больше, чем данное число, на 21. Найдите это число.

2. (5) Два комбайна убирают хлебное поле. После того как первый проработал на поле 2 часа, а второй — 5 часов, оказалось, что убрана половина поля. Затем 1,5 часа они работали вместе и убрали еще четверть поля. Оставшуюся работу выполнял только первый комбайн. Определите, сколько ему понадобилось для этого времени.

3. (2) Две автомашины, выехавшие из городов А и Б навстречу друг другу, каждая со своей скоростью, встретились через 6 часов. Первой машине, чтобы пройти 2/5 пути от А до Б, требуется на 2 часа больше, чем второй, для того, чтобы пройти 2/15 пути от Б до А. За какое время проходит расстояние между А и Б каждая машина?

4. (2) Число десятков двузначного числа на 4 больше числа его единиц; произведение же этого числа на сумму его цифр равно 496. Найдите это число.

5. (10) Сумма первых трех членов арифметической прогрессии равна 66, а произведение второго и третьего членов равно 528. Найдите сумму первых сорока членов.

6. (3) Два тела, находящиеся на расстоянии 310 м одно от другого, одновременно начали двигаться навстречу друг другу. Первое тело движется равномерно со скоростью 15 м/с, а второе — равноускоренно с начальной скоростью 1 м/с и ускорением 3 м/с². Через сколько секунд они встретятся?

7. (11) Вычислите

$$\frac{1\frac{1}{5}:\left(\frac{17}{40}+0{,}6-0{,}005\right)\cdot 1{,}7}{\frac{5}{6}+1\frac{1}{3}-1\frac{23}{30}}.$$

8. Упростите выражение:

а) (3)

$$\frac{c^{\frac{1}{2}}-a^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{\frac{1}{a}}-\sqrt{\frac{1}{c}}}\left(\left(\frac{c}{a}\right)^{-1}-\left(\frac{a}{c}\right)^{-1}\right):\frac{(a+c)\sqrt{c}}{\sqrt{ac}}.$$

б) (10)

$$\frac{(ab^{-1}+a^{-1}b+1)(a^{-1}-b^{-1})^2}{a^2b^{-2}+a^{-2}b^2-(ab^{-1}+a^{-1}b)}.$$

в) (12)

$$\left(\frac{x^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{2}}}{xy^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{1}{2}}y}+\frac{x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}}{xy^{\frac{1}{2}}-x^{\frac{1}{2}}y}\right)\times$$

$$\times\frac{x^{\frac{3}{2}}\cdot y^{\frac{1}{2}}}{x+y}-\frac{2y}{x-y}.$$

9. (6) Вычислите

$$\log_{\sqrt{a}}\frac{1}{a^3}+\log_a\sqrt{a\sqrt{a}}.$$

10. (2) Докажите, что сумма

$$\sqrt{\sin^4 x+4\sin^2\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}+$$

$$+\sqrt{\cos^4 x+4\cos^2\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}$$

является постоянным числом, не зависящим от x.

11. Найдите:

а) (5) $\cos^4\alpha+\sin^4\alpha$, если $\sin 2\alpha=\frac{1}{7}$;

б) (3) $\cos(60^\circ-\alpha)$, если $\operatorname{tg}\alpha=\frac{3}{4}$ и $180^\circ<\alpha<270^\circ$.

12. (10) Упростите выражение $\frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}\times\left(1+\frac{(1-\cos\alpha)^2}{\sin^2\alpha}\right)$ и найдите его значение, если $\cos\alpha=-0{,}8$; $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$.

13. (6) Чему равно выражение $\sin\alpha+\cos\frac{\alpha}{2}$, если $\cos\alpha=-\frac{2}{3}$ и $\frac{\pi}{2}<\alpha<\frac{3\pi}{2}$.

14. (12) Найдите целый корень уравнения

$$|3x-7|=x+5.$$

15. Решите уравнение:

а) (6) $x^2-0{,}8|x|-0{,}33=0$;

б) (11) $16\cdot 2^{3x}=\frac{1}{32}\cdot 4^{x-3}$;

в) (4) $3^{2x}-3^x=702$;

г) (9) $2\cdot 5^{1-x}-2\cdot 5^{x+1}+25^x+25^{-x}=26$;

д) (2) $|x-3|^{x^2-x}=|x-3|^2$;

е) (10) $x^{1-\frac{1}{3}\lg x^2}-\frac{1}{\sqrt[3]{100}}=0$;

ж) (9) $2^{|x+2|}-|2^{x+1}-1|=2^{x+1}+1$;

з) (9) $3\log_2(x+1)^3+12=2\log_2(5-x)^3+2\log_2(5+x)^3$;

и) (9) $\log_{36}x^2+\log_6(x+5)=1$;

к) (10) $9^{\log_3 x-\frac{1}{2}}-28\cdot 3^{\log_3 x-3}+1=0$;

л) (13) $\left(\frac{1}{5}\right)^{\lg^2 x-\lg x}=\left(\frac{1}{125}\right)\cdot 5^{\lg x-1}$;

м) (13) $\sqrt{\log_2 x}-0{,}5=\log_2\sqrt{x}$;

н) (10) $2\cos^2 x+\sin^2 x-3\sin x\cos x=0$;

о) (3) $1-\left(\cos\frac{5x}{2}+\sin\frac{5x}{2}\right)^2=-\sin 3x$;

п) (10) $\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}=\sqrt{2}\cos x$;

р) (7) $-\cos 7x+\sin 8x=\sin 2x+\cos 3x$;

с) (12) $4\cdot(1+\cos x)=3\sin^2\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2}$;

т) (3) $\frac{\sin x}{1+\cos x}=\frac{1+\cos x}{\sin(\pi-x)}-1$;

у) (2) $\cos^6 x+\sin^6 x-\cos^2 2x=\frac{1}{8}$;

ф) (9) $\sin x+\sin 2x-\sin(3x+\pi)=1+\cos x-\cos(2x+\pi)$;

х) (13) $2\sin 3x+2\cos x=(\sin x+\cos x)^2+(\sin 2x+\cos 2x)^2$;

ц) (13) $\sin 2x+2\operatorname{ctg} x=3$;

ч) (12) $\sin^3 x\cdot(1+\operatorname{ctg} x)+\cos^3 x(1+\operatorname{tg} x)=\cos 2x$;

ш) (7) $\sqrt{5\cos x-1}=\sqrt{2}\sin x$.

16. (4) Найдите корни уравнения $\cos x=\sin 2x+\sin 4x$, удовлетворяющие неравенству $x^2+x-6>0$.

17. (4) Найдите все пары чисел x и y, которые удовлетворяют уравнению

$$\left(x^2+\frac{16}{x^2}\right)\cdot\left(1+\sin^2(x+y)\right)=1+7\cos^2(x+y).$$

18. (11) Сколько корней имеет уравнение

$$\cos x\cdot\cos 2x=\cos 3x$$

в промежутке $x\in[0;\ 2\pi]$?

19. (6) Найдите значения функции $\sin x$, если

$$5\cos x-\cos 2x-3=0.$$

20. (11) Сколько точек пересечения имеют графики функций

$$y=2^{\frac{|x|}{x}};\qquad y=x+1{,}5?$$

21. (11) Найдите абсциссу точки пересечения графиков функций

$$y=(x-1)^3;\quad y=\log_3(2-x).$$

22. (10) Найдите целое значение k, для которого уравнение

$$(2k+1)x^2+3(k-1)x-k+1=0$$

имеет равные корни.

23. (5) Определите, при каких a уравнение $a^2+a(x-1)=2+\frac{7}{2x}$ имеет два разных корня, равных по модулю.

24. (2) При каких действительных значениях a все корни уравнения

$$ax^2-(a^3+2a^2+1)x+a(a+2)=0$$

лежат в отрезке $[0;\ 1]$?

25. Решите систему уравнений:

а) (4) $\begin{cases} x^2+xy=3\\ y^2+xy=6;\end{cases}$

б) (5) $\begin{cases} |x|+y+2=0\\ |y|=x^2-4;\end{cases}$

в) (12)

$$\begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt{y}}=\frac{4}{3}\\ xy=9;\end{cases}$$

г) (12)

$$\begin{cases} \frac{x}{y}+\frac{y}{x}=\frac{25}{12}\\ x^2-y^2=7;\end{cases}$$

д) (3)

$$\begin{cases} x^{\frac{1}{y}}=2^{1-\frac{1}{y}}\\ x=64^{\frac{1}{y}};\end{cases}$$

е) (3)

$$5^{\log_5 x}=y-2$$

$$2^{\frac{2}{x}}=\left(\frac{1}{2}\right)^{1-y}.$$

26. Найдите область определения функции:

а) (12)

$$y=\sqrt{5-x-\frac{6}{x}};$$

б) (2) $y=\sqrt{\log_{|x-1|}|3-1|}$;

в) (9) $y=\log_{1-x}(\sqrt{x^2+11x+24}-x-3)$.

27. Решите неравенство:

а) (12) $\frac{x^2+x+1}{2x^2+5}>\frac{1}{2}$;

б) (3) $\sqrt{-x}>2x-1$;

в) (4) $\frac{11\cdot 3^{x-1}-31}{4\cdot 9^x-11\cdot 3^{x-1}-5}\geqslant 5$;

г) (12) $0{,}2^{\frac{x^2+2}{x^2-1}}<2{,}5$;

д) (10) $\left(\frac{\sqrt{10}}{3}\right)^{x^2-15}>(0{,}81)^x$;

е) (7) $-\log_{\frac{1}{4}}x+2\log_x 4+3\leqslant 0$;

ж) (3) $2^{\log_{\frac{1}{3}}\frac{9x+1}{x-2}}>\frac{1}{4}$;

з) (6) $\log_{x+2}|x|>1$;

и) (5) $\log_{3x-2}(x+2)>1$;

к) (9) $2{,}25^{\log_2(x^2-3x-10)}>\left(\frac{2}{3}\right)^{\log_{1/2}(x^2+4x+4)}$;

л) (13) $\log_{x^2}(2+x)<1$;

м) (13) $\log_a(x-1)+\log_a x>2$;

н) (6) $a^{x+2}+8a^{x-1}-\frac{4}{a}>a+2$ при $a>0$, $a\neq 1$.

28. (3) При каких значениях параметра p выражение $\sqrt{-x^2+2(p-1)x-p+1}$ не имеет смысла ни при каких значениях x?

29. (7) Для каких значений параметра a решение системы

$$\begin{cases} -x^2+12x-a\geqslant 0,\\ x\leqslant 2\end{cases}$$

состоит из одной точки?

30. (4) Изобразите на координатной плоскости xOy множество точек, координаты которых удовлетворяют неравенствам

$$\log_2(4y-4x^2+1)\geqslant\log_2(2y).$$

$$\sqrt{2y-4x+3}\leqslant\sqrt{8-2x}.$$

31. Постройте график функции:

а) (9) $y=(|x+1|+1)(x-3)$;

б) (9) $y=\frac{1}{2}(|2x+3|-3)(x-2)$.

Анализ

1. (11) Найдите ускорение движения точки, движущейся прямолинейно, если движение точки задано уравнением

$$S=5t^2+58t-623.$$

2. (3) Тело движется прямолинейно по закону $S(t)=5+6t^2-\frac{1}{3}t^3$, где $S(t)$ — путь (в метрах) и t — время (в секундах). Найдите наибольшее значение его скорости.

3. (6) Напишите уравнения касательных к графику функции $y=2x^2+2$, проходящих через точку $(0; -6)$.

4. (6) Докажите, что функция $y=1+12x+3x^2-2x^3$ возрастает на интервале $]-1; 1[$.

5. Найдите точки максимума и минимума и промежутки монотонности функций:

а) (13) $y=x^4+4x^3-8x^2+3$;

б) (4) $y=\dfrac{1+x+x^2}{1-x+x^2}$.

6. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции:

а) (13) $y=x^2(2x-3)-12(3x-2)$ на отрезке $[-3; 6]$;

б) (3) $y=15-3\cos x+\cos 3x$ на отрезке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

7. (3) Найдите критические точки функции $f(x)=\cos x+\frac{1}{2}\sin(2x+\pi)$, принадлежащие отрезку $[0; \pi]$.

8. (7) При каких значениях $a>0$ точка $x=3$ является точкой минимума функции $f(x)=2x^3-6a^2x+3$?

9. (2) Найдите значения параметра c, при которых функция

$$f(x)=(c-12)x^3+3(c-12)x^2+6x+7$$

монотонно возрастает при всех x.

10. (4) Известно, что $2x^2+2y^2=1$. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $z=3x-y$.

Геометрия

1. (2) Пусть $ABCD$ — параллелограмм, причем $[AD]\|[BC]$, K — середина $[BC]$, P — середина $[DC]$. Выразите через векторы $\vec{AK}=\vec{a}$ и $\vec{AP}=\vec{b}$ сумму векторов $\vec{AB}$ и $\vec{CB}$.

2. (10) Около окружности радиуса r описан равнобедренный треугольник с углом при вершине в 120°. Найдите длины сторон треугольника.

3. (2) Докажите, что вписанная в прямоугольный треугольник окружность точкой касания делит гипотенузу на отрезки, произведение которых равно площади данного треугольника.

4. (7) В ромб вписана окружность радиуса R. Три точки касания окружности со сторонами ромба соединены между собой. Найдите площадь получившегося треугольника, если большая диагональ ромба в 4 раза больше радиуса вписанной окружности.

5. (5) Две окружности касаются внешним образом. К первой из них проведена касательная, проходящая через центр второй окружности. При этом расстояние от точки касания до центра второй окружности равно диаметру второй окружности. Найдите отношение площадей получившихся кругов.

6. (10) Диагональ прямоугольной трапеции равна ее боковой стороне. Найдите длину средней линии трапеции, если ее высота 4 см, а боковая сторона 5 см.

7. (6) Величина угла при основании равнобедренного треугольника равна φ. В каком отношении делит высота этого треугольника, опущенная к основанию, другую высоту?

8. (2) В треугольнике ABC известны стороны $|AC|=b$, $|BC|=a$, $|AB|=c$. Найдите, в каком отношении точка D, лежащая на стороне $[BC]$, делит отрезок $[BC]$, если известно, что произведение расстояний от точки D до двух других сторон треугольника является наибольшим.

9. (16) Площадь основания правильной треугольной пирамиды равна половине площади ее боковой поверхности. Найдите величину плоского угла при вершине пирамиды.

10. (3) В правильной треугольной пирамиде сторона основания равна a и составляет с боковым ребром угол α. Найдите площадь сечения, проведенного через боковое ребро и высоту пирамиды. Почему угол α должен быть больше 30°?

11. (11) В правильной треугольной пирамиде вычислите угол наклона бокового ребра к плоскости основания, если отношение бокового ребра к стороне основания равно 2:3. Ответ запишите в градусах.

12. (12) Основание пирамиды — квадрат, ее высота проходит через одну из вершин основания. Найдите площадь боковой поверхности, если сторона основания 20, а высота 21.

13. (12) Стороны основания прямоугольного параллелепипеда относятся как $m:n$, а диагональное сечение — квадрат с площадью Q. Определите объем параллелепипеда.

14. (12) Основание прямого параллелепипеда — ромб с острым углом α и большей диагональю m. Меньшая диагональ параллелепипеда наклонена к плоскости основания под углом β. Найдите объем параллелепипеда.

15. (7) В основании пирамиды $ABCD$ лежит правильный треугольник ABC со стороной, равной a. Боковое ребро DB перпендикулярно плоскости основания. Длина бокового ребра CD равна $2a$. Точка M является серединой ребра AD. Найдите угол между прямыми CM и MB.

16. (11) Объем конуса V, а радиус основания R. Чему равна площадь осевого сечения конуса? Вычислите ее, если $V=4\pi R$.

17. (6) Ромб с острым углом α вращается вокруг одной из своих сторон. Длина большей диагонали ромба равна d. Найдите площадь поверхности полученного тела вращения.

18. (5) Боковая поверхность конуса с образующей l развернута в сектор, центральный угол которого равен $6\pi/5$. Найдите объем конуса.

19. (13) В цилиндр помещен конус так, что основание конуса совпадает с нижним основанием цилиндра, а вершина конуса совпадает с центром верхнего основания цилиндра. Образующая конуса наклонена к плоскости основания под углом α. Найдите объем цилиндра, если площадь полной поверхности конуса S.

20. (10) В конус вписан шар. Угол между высотой конуса и его образующей равен a. Найдите отношение объема конуса к объему шара.

21. (3) Вокруг конуса, угол наклона образующей которого к плоскости основания равен α, описан шар. Найдите отношение объемов данного конуса и шара.

22. (4) В конус вписан шар. Отношение объема шара к объему конуса равно q. Най-

дите угол между образующей и плоскостью основания конуса. Укажите допустимые значения q.

23. (3) Около шара радиуса R описана правильная четырехугольная пирамида, боковые грани которой наклонены к плоскости основания под углом α. Найдите площадь полной поверхности пирамиды.

24. (4) В правильной треугольной призме проведено сечение, которое проходит через одну из сторон нижнего основания и противоположную вершину верхнего основания. Найдите площадь сечения, если сторона основания равна a, а плоскость сечения образует с плоскостью основания угол, равный α.

25. (4) Три одинаковых шара радиуса r касаются одной плоскости и каждый из них касается двух других шаров. Найдите радиус шара, который касается плоскости и трех данных шаров.

26. (13) Докажите, что если противоположные ребра тетраэдра попарно равны, то вписанный в тетраэдр и описанный вокруг него шары концентричны.

27. (13) Докажите, что если все диагонали параллелепипеда равны по длине, то он прямоугольный.

Устный экзамен

Алгебра

1. (9) Три числа, сумма которых равна 26, образуют геометрическую прогрессию и являются первым, вторым и пятым членом арифметической прогрессии. Найдите эти числа.

2. (6) Найдите два числа таких, что первое из них составляет 40 % квадрата второго числа, а второе — 135 % квадрата первого числа.

3. (6) Вычислите

$$\log_{0,25}\cos 675^\circ.$$

4. (3) Найдите 10 % от числа

$$\frac{\left(27^{\log_3 2}+5^{\frac{1}{2}\log_5 49}\right)\left(-81^{\log_9 4}+8^{\frac{1}{2}\log_2 9}\right)}{3+5^{\frac{1}{2}\log_5 16+\log_5 3}}.$$

5. (12) Вычислите $\cos\left(\alpha+\frac{5}{4}\pi\right)$, если

$$\sin\alpha=-\frac{4}{5},\quad \pi<\alpha<\frac{3}{2}\pi.$$

6. (12) Между какими целыми числами заключается $\log_3\frac{1}{7}$?

7. (2) Не используя таблиц логарифмов, докажите, что

$$\frac{1}{\log_2\pi}+\frac{1}{\log_5\pi}>2.$$

8. (3) Вычислите значение выражения $\left(\cos^2\alpha-2\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\cos(\pi+\alpha)-\sin^2\alpha\right)^2$ при $\alpha=\frac{5\pi}{24}$, предварительно упростив его.

9. Решите уравнение:

а) (9) $\sqrt{5x-1}=\sqrt{3x-2}-\sqrt{2x-3}$;

б) (9) $\sqrt{x+1}-\sqrt{9-x}=\sqrt{2x-12}$;

в) (10) $\sqrt{4+x\sqrt{x^2+40}}=x+2$;

г) (9) $4^{1-x}-4^{1+x}+16^x+16^{-x}=7$;

д) (9) $\lg x^2+\lg(x+10)^2=2\lg 11$;

е) (10) $\log_2(9^{x-1}+7)=2+\log_2(3^{x-1}+1)$;

ж) (7) $4\sin^4 x+\cos 4x=1+12\cos^4 x$;

з) (9) $\sin 2x=1+\sqrt{2}\cos x+\cos 2x$.

10. (10) Найдите корни уравнения $3\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=2\cos\left(\frac{\pi}{4}+x\right)$, принадлежащие промежутку $]-\pi;\ 0[$.

11. (7) При каких x вектор $\vec{a}=(-1;\ 4\sin x)$ перпендикулярен вектору $\vec{b}=(\sin 3x;\ \cos 2x)$.

12. Решите систему уравнений:

а) (9) $\begin{cases} 2^{\frac{x+y}{3}}+2^{\frac{x+y}{6}}=6, \\ x^2+5y^2=6xy; \end{cases}$

б) (2) $\begin{cases} \sqrt{(x+y)^2}=3, \\ \sqrt{(x-y)^2}=1. \end{cases}$

13. Решите неравенство:

а) (3) $\frac{1}{x+2}<\frac{3}{3x-1}$;

б) (7) $|x^2-5x|<6$;

в) (9) $\sqrt{x+1/4}>2x-1/2$;

г) (6) $(x+2)\sqrt{x^2-3x-4}\geqslant 0$;

д) (9) $\log_{1/3}x>\log_x 3-5/2$.

14. (10) Найдите все значения x, принадлежащие промежутку $[0;\ \pi]$, для которых выполняется неравенство

$$\left(\frac{5}{4}\right)^{2\cos^2 x}<\frac{5}{4}.$$

15. Найдите область определения функции:

а) (12) $y=\sqrt{|x|-4}$;

б) (10) $y=\frac{\sqrt{7+6x-x^2}}{\lg(2x-8)}$;

в) (2) $f(x)=\sqrt{2^x-3^x}$;

г) (9) $y=\log_{(x+5)}(\sqrt{x^2-5x-24}-x+2)$.

16. (11) Определите коэффициенты квадратного уравнения $x^2+px+q=0$ так, чтобы его корни были равны p и q.

17. (10) График функции $y=a^{x+2}$ проходит через точку $M(1;\ 8)$. Найдите a и множество значений x таких, что $0,5<y<16$. Постройте график, указав на нем искомое множество x и данное множество y.

18. Постройте график:

а) (6) $y=x^2-|x|(x+4)+2$;

б) (7) $y=|\log_2(x-1)|$;

в) (7) $y<e^{\ln\sin x}$.

Анализ

1. (6) Корни квадратного трехчлена равны -1 и 3. Найдите корень производной этого трехчлена.

2. (3) Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $y=15-3\cos x+\cos 3x$ на отрезке $\left[0;\ \frac{\pi}{2}\right]$.

3. Найдите промежутки возрастания и убывания функции:

а) (9) $y=(x+1)\sqrt[3]{(x-1)^2}$;

б) (12) $y=2^{x^2-4x}$.

4. (2) Докажите, что любая касательная к кривой

$$y=x^5+8x+1$$

образует с осью Ox острый угол.

Геометрия

1. (3) Известны координаты трех вершин параллелограмма $A(-3,\ -2)$, $B(3,\ 1)$, $C(5,\ 0)$. Найдите координаты его четвертой вершины.

2. (6) Заданы векторы $\vec{OB}=\vec{b}$ и $\vec{OC}=\vec{c}$, где O — точка пересечения медиан треугольника ABC. Найдите векторы $\vec{AB}$ и $\vec{AC}$.

3. (10) Длины катетов прямоугольного треугольника равны 12 см и 35 см. Найдите длину медианы, проведенной к гипотенузе.

4. (2) В прямоугольный треугольник с катетом a вписана окружность радиуса r. Найдите гипотенузу этого треугольника.

5. (7) Дана прямоугольная трапеция с основаниями, равными 3 и 2, и меньшей боковой стороной, равной 1. Определите расстояние от точки пересечения диагоналей трапеции до ее основания.

6. (6) Отношение площади круга к площади описанного около него ромба равно $\frac{\pi}{8}$. Найдите острый угол ромба.

7. (3) Периметр равнобедренного треугольника равен 12. При какой длине основания его площадь будет наибольшей?

8. (11) Образующая конуса наклонена к плоскости основания под углом α. Определите площадь основания конуса, если его полная поверхность равна Q. Вычислите значение площади основания при $Q=36$, $\alpha=60°$.

Физика

Задачи устного и письменного экзаменов

Механика

1. (11) Скорость электропоезда увеличилась с $v_1=21{,}6$ км/ч до $v_2=108$ км/ч на пути $l=54$ м. Определите ускорение движения поезда. Результат представьте в единицах СИ.

2. (10) Какой путь проходит свободно падающее тело за третью секунду движения ($g=10$ м/с^2)?

3. (10) С какой начальной скоростью необходимо вертикально вниз бросить тело массой $m=2$ кг, чтобы через $t=1$ с его кинетическая энергия была равна $E_k=2{,}5$ кДж ($g=10$ м/с^2)?

4. (10) С крыши здания высотой $h=16$ м через одинаковые промежутки времени падают капли воды, причем первая ударяется о землю в тот момент, когда пятая отделяется от крыши. Определите: а) время падения капли; б) расстояние между третьей и четвертой каплями в воздухе в момент удара первой капли о землю.

5. (1) С поверхности земли вертикально вверх брошен шарик. Некоторую точку A шарик проходит дважды: спустя время t_1 и время t_2 после начала движения. Определите высоту точки A над поверхностью земли. Сопротивление воздуха не учитывать.

6. (5) С вертолета, находящегося на высоте $h=500$ м, упал камень. Через какое время камень достигнет поверхности земли, если: а) вертолет неподвижен; б) вертолет поднимается со скоростью $v_0=4{,}9$ м/с? Сопротивление воздуха не учитывать.

7. (11) Камень, брошенный горизонтально на высоте $h=1{,}25$ м над землей, упал на нее на расстоянии $l=5$ м от места бросания (по горизонтали). Определите начальную скорость камня. Результат представьте в единицах СИ. Сопротивление воздуха не учитывать. Принять $g=10$ м/с^2.

8. (1) Каким должен быть объем $V_п$ полости железного буя для того, чтобы он мог плавать на поверхности воды? Объем буя V, плотность железа $\rho_ж$, плотность воды $\rho_в$.

9. (9) На чашах погруженных в воду равноплечных весов находятся алюминиевый и железный шары одинаковой массы m. Определите массу сплошного шара из меди, который надо добавить для восстановления равновесия. Плотность алюминия $\rho_а=2{,}7$ г/см^3, железа $\rho_ж=7{,}88$ г/см^3, меди $\rho_м=8{,}93$ г/см^3.

10. (9) В бак с жидкостью опущена длинная трубка диаметром d, к которой снизу плотно прилегает цилиндрический диск толщиной h и диаметром D. Плотность материала диска $\rho_д$ больше плотности жидкости $\rho_ж$. Трубку медленно поднимают вверх. Определите, на каком уровне диск оторвется от трубки.

11. (1) Для взятия пробы грунта на дно океана на стальном тросе опускается прибор. Найдите предельную глубину погружения, если предел прочности на разрыв стали $\sigma_{пр}=4{,}8\cdot10^8$ Н/м^2. Массой прибора по сравнению с массой троса можно пренебречь. Плотность стали $\rho_c=7{,}8\cdot10^3$ кг/м^3, плотность морской воды $\rho_в=1{,}03\cdot10^3$ кг/м^3.

12. (14) В сосуде находятся две несмешивающиеся жидкости различных плотностей. На границе раздела жидкостей плавает однородный куб, погруженный целиком в жидкость. Плотность материала куба ρ больше плотности ρ_1 верхней жидкости, но меньше плотности ρ_2 нижней жидкости ($\rho_1<\rho<\rho_2$). Какая часть объема куба будет находиться в верхней жидкости?

13. (14) От поезда, идущего по горизонтальному участку пути с постоянной скоростью v_0, отцепляется 1/3 состава. Через некоторое время скорость отцепившихся вагонов уменьшилась в два раза. Считая, что сила тяги при разрыве состава не изменилась, определите скорость головной части поезда в этот момент. Сила трения пропорциональна силе тяжести и не зависит от скорости.

14. (14) Найдите ускорения, с которыми будут двигаться грузы с массами m_1 и m_2 в системе, состоящей из одного неподвижного и трех подвижных блоков (рис. 1). При каком соотношении между массами грузов система будет находиться в равновесии? Трением и массой блоков пренебречь.

15. (11) С какой минимальной силой, направленной горизонтально, надо прижать плоский брусок к вертикальной стене, чтобы он не соскользнул вниз? Масса бруска $m=6$ кг, коэффициент трения между бруском и стенкой $\mu=0{,}1$. Результат представьте в единицах СИ. Принять $g=10$ м/с^2.

16. (1) Поезд, подходя к станции со скоростью $v=72$ км/ч, начал тормозить. Каково наименьшее время торможения до полной остановки поезда, безопасное для спящих пассажиров (пассажиры не падают с полок)? Каков минимальный тормозной путь? Ускорение поезда при торможении считайте постоянным, коэффициент трения пассажиров о полки $\mu=0{,}2$.

17. (13) Вагон идет по закруглению радиусом $R=800$ м со скоростью $v=72$ км/ч. Расстояние между рельсами $l=1{,}68$ м. Определите, на сколько должен быть выше внешний рельс по сравнению с внутренним, чтобы вагон не перевернулся?

18. (1) Внутри трубы между точками A и B (рис. 2) скользит шайба массой m. Определите максимальную силу давления шайбы на стенку трубы, если длина дуги AB равна диаметру трубы. Трение не учитывать.

19. (9) Автомобиль массой $m=1000$ кг въехал на выпуклый мост длиной $l=156$ м

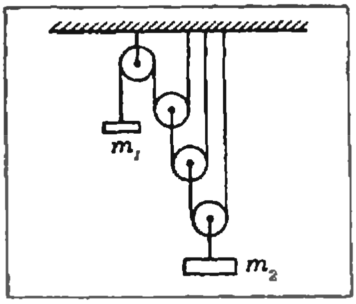


Рис. 1.

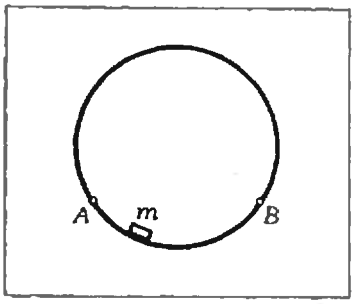


Рис. 2.

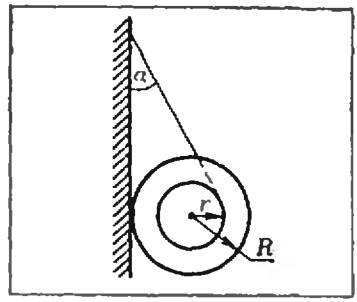


Рис. 3.

со скоростью $v_0=36$ км/ч. По мосту он движется с ускорением $a=1$ м/с^2. Определите силу давления со стороны автомобиля в середине моста, где радиус кривизны $R=200$ м.

20. (1) Катушка за намотанную на нее нить подвешена около вертикальной стены (рис. 3). Малый радиус катушки r, большой — R, коэффициент трения между катушкой и стеной μ. При каком наименьшем угле α между нитью и стеной катушка не будет скользить по стене?

21. (1) Если к пружине поочередно подвешивать грузы массой m_1 и m_2, то ее длина оказывается равной соответственно l_1 и l_2. Какая работа совершается при растяжении пружины от длины l_1 до длины l_2?

22. (14) Деревянный шар массой M лежит на тонкой подставке. Снизу в шар попадает пуля массой m, летящая вертикально вверх, и пробивает его. При этом шар подскакивает на высоту h. На какую высоту поднимется пуля над поставкой с шаром, если ее скорость перед ударом о шар была v?

23. (10) Два груза массами $m_1=10$ кг и $m_2=15$ кг свободно подвешены на нитях длиной $l=2$ м так, что соприкасаются между собой. Меньший груз отклонили на угол $\alpha=60°$. Определите: а) на сколько изменилась потенциальная энергия отклоненного груза; б) на какую высоту поднимутся грузы, если отклоненный груз отпустили и после удара грузы движутся вместе.

24. (1) Два пластилиновых шара, массы которых относятся между собой, как 1:2, подвешены на одинаковых легких нитях длиной l. При этом шары касаются друг друга. Шары развели в противоположные стороны так, что нити отклонились от вертикали на угол α, и одновременно отпустили. Определите скорость слипшихся шаров сразу после удара. Сопротивление воздуха не учитывать.

25. (8) Электрическая лебедка, развивающая мощность $N=15$ кВт, тянет равномерно вверх по наклонной плоскости тело. Определите угол наклона плоскости, если тело обладает импульсом $P=5\cdot10^3$ кг·м/с, а коэффициент трения $\mu=0{,}1$.

Молекулярная физика. Тепловые явления

1. (14) Средняя кинетическая энергия хаотического движения молекул при данной температуре у всех веществ одинакова. Определите отношение средних скоростей хаотического движения молекул водорода и кислорода при одной и той же температуре.

2. (8) Сосуд емкостью $V=10$ л наполнили газом при давлении $p=2\cdot10^5$ Па. Какое количество воды войдет в сосуд, если под водой на глубине $h=40$ м в самой нижней части его будет сделано отверстие? Атмосферное давление $p_a=10^5$ Па. Плотность воды $\rho=10^3$ кг/м^3.

3. (1) В закрытом баллоне при температуре $T=300$ К и давлении $p=1{,}1\cdot10^5$ Па находится газ. При его нагревании на $\Delta T=400$ К давление газа в баллоне повысилось на $\Delta p=160$ кПа. Произошла ли диссоциация газа при нагревании? Изменением объема баллона при нагревании можно пренебречь.

4. (14) Газ последовательно переводится из состояния *1* с температурой T_1 в состояние *2* с температурой T_2, а затем в состояние *3* с температурой T_3 и возвращается в состояние *1*. Определите температуру T_3, если процессы изменения состояния происходили так, как это показано на рисунке 4, а температуры T_1 и T_2 известны.

5. (9) В сосуд объемом $V=10$ л, наполненный сухим воздухом при нормальных условиях (давлении $p_0=1{,}01\cdot10^5$ Па, температуре $t_0=0$ °C), вводят воду массой $m=3$ г и нагревают до температуры $t=100$ °C. Определите давление влажного воздуха в сосуде при этой температуре.

6. (1) В сосуде объемом $V=100$ л находился сухой воздух при нормальном атмосферном давлении ($p_0=1{,}01\cdot10^5$ Па). Затем в сосуд налили $m=100$ г воды и герметически закрыли его. Вся ли вода превратится в пар, если сосуд нагреть до температуры $t=100$ °C и поддерживать эту температуру постоянной? Молярная масса воды $M=18\cdot10^{-3}$ кг/моль, универсальная газовая постоянная $R=8{,}31$ Дж/(моль·К). Изменением объема сосуда при нагревании можно пренебречь.

7. (14) В котле паровой машины температура $t_1=150$ °C. Температура холодильника $t_2=10$ °C. Какую теоретически максимальную работу может выполнить машина, если в топке, коэффициент полезного действия которой $\eta=80$ %, сожжено $m=200$ кг угля с удельной теплотой сгорания $q=3{,}1\cdot10^7$ Дж/кг?

8. (5) С какой скоростью должна лететь свинцовая пуля, чтобы расплавиться при ударе о стенку? Температура летящей пули $T=300$ К. Предполагается, что все количество теплоты, выделившееся при ударе, пошло на плавление пули. Температура плавления свинца $T_п=600$ К, удельная теплоемкость свинца $c=100$ Дж/(кг·К), удельная теплота плавления свинца $\lambda=3\cdot10^4$ Дж/кг.

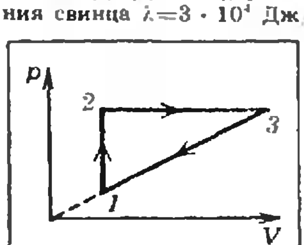


Рис. 4.

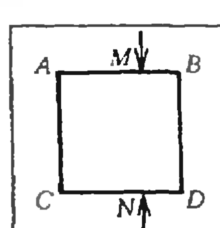


Рис. 5.

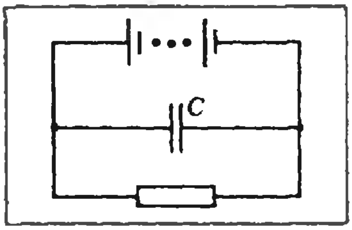


Рис. 6.

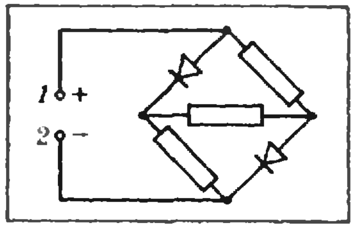


Рис. 7.

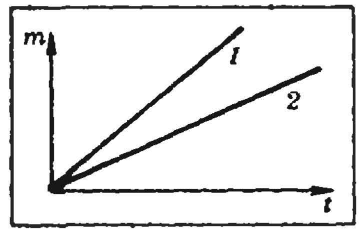


Рис. 8.

9. (1) За время $\tau=2,0$ ч автомашина прошла путь $s=160$ км. Двигатель при этом развивал среднюю мощность $N=70$ кВт при коэффициенте полезного действия $\eta=25$ %. Сколько горючего сэкономил водитель за эту поездку, если норма расхода $m_0=36$ кг на $s_0=100$ км пути? Теплота сгорания топлива $q=4,2\cdot10^7$ Дж/кг.

Основы электродинамики

1. (5) Два точечных заряда находятся на расстоянии l друг от друга. Если расстояние между ними уменьшится на $\Delta l=50$ см, то сила взаимодействия увеличится в 2 раза. Найдите l.

2. (9) Между пластинами плоского воздушного горизонтально расположенного конденсатора находится заряженная капелька масла массой $m=10^{-8}$ г и зарядом $q=10^{-15}$ Кл. При разности потенциалов между пластинами $U=$ $=500$ В и при начальной скорости $v_0=0$ капля проходит некоторое расстояние в два раза медленнее, чем при отсутствии электрического поля. Найдите расстояние между пластинами. Сопротивлением воздуха пренебречь.

3. (8) Плоский воздушный конденсатор зарядили до разности потенциалов $U=200$ В, затем отключили от источника напряжения, увеличили расстояние между обкладками в 3 раза и погрузили целиком в трансформаторное масло. Определите разность потенциалов на пластинах конденсатора после погружения в масло, если диэлектрическая проницаемость масла $\varepsilon=2,2$.

4. (14) На дне широкого сосуда с жидким диэлектриком с относительной диэлектрической проницаемостью ε закреплена пластина конденсатора площадью S. Другая пластина, имеющая вид бруска высотой H и площадью S, плавает над ней в диэлектрике. На какую глубину погрузится нижняя плоскость бруска, если на пластины подать одинаковые по модулю, но противоположные по знаку заряды Q? Плотность жидкости ϱ_0, плотность бруска ϱ ($\varrho_0>\varrho$). Поле между пластинами считать однородным.

5. (8) Определите ЭДС источника, если при подключении к нему резистора с сопротивлением R напряжение на зажимах источника $U_1=10$ В, а при подключении резистора с сопротивлением $5R$ напряжение $U_2=20$ В.

6. (13) Аккумулятор замкнут на некоторый проводник. В цепь включают параллельно друг другу два амперметра; они показывают соответственно $I_1=2$ А и $I_2=3$ А. Затем эти амперметры включают в цепь последовательно, и они показывают $I_3=4$ А. Какой ток течет в цепи в отсутствие амперметров?

7. (14) Дан проволочный квадрат (рис. 5). Сопротивление стороны квадрата $R=1$ Ом. Контакты M и N перемещаются одновременно по сторонам AB и CD. В каких пределах изменяется сопротивление квадрата?

8. (11) Источник тока замыкается один раз проводником с сопротивлением $R_1=4$ Ом, а другой — $R_2=9$ Ом. В обоих случаях количество теплоты, выделившееся в проводниках за одно и то же время, оказалось одинаковым. Определите внутреннее сопротивление источника. Результат представьте в единицах СИ.

9. (1) Гальванический элемент с ЭДС $\mathcal{E}$ и внутренним сопротивлением r замкнут на внешнюю цепь. При изменении ее сопротивления ток I в цепи также изменяется. Найдите зависимость коэффициента полезного действия η источника от тока I. Начертите график этой зависимости.

10. (5) Две электроплитки, включенные в сеть параллельно, потребляют мощность P. Какую мощность будут потреблять эти электроплитки, включенные последовательно, если одна из электроплиток при параллельном включении потребляет мощность P_1?

11. (10) По проводнику сопротивлением $R=300$ Ом в течение времени $\tau=20$ с проходит ток силой $I=2$ А. Определите: а) выделившееся количество теплоты; б) во сколько раз увеличится объем газа, если проводник был помещен в сосуд с газом массой $m=40$ г при начальной температуре $T=300$ К. Процесс считать изобарным. Потери тепла не учитывать. Удельная теплоемкость газа в данном процессе равна $c=5\cdot10^3$ Дж/(кг·К).

12. (9) Батарея аккумуляторов замкнута проводником, параллельно которому присоединен конденсатор емкостью $C=10$ мкФ (рис. 6). Определите ЭДС батареи, если заряд на конденсаторе $q=4,6\cdot10^{-4}$ Кл, а в проводнике выделяется мощность $P=23$ Вт и известно, что ток короткого замыкания батареи $I_0=5$ А.

13. (1) Во сколько раз изменится тепловая мощность, выделяющаяся в электрической цепи, при перемене полярности на клеммах 1 и 2 (рис. 7)? Модуль напряжения на клеммах считайте постоянным, диоды идеальными, сопротивления резисторов одинаковыми.

14. (11) На рисунке 8 представлены графики зависимости массы двух различных веществ, выделяемых на электродах при электролизе, от времени протекания тока через электролит. Какому из этих графиков (1 или 2) соответствует вещество с более высоким значением электрохимического эквивалента, если сила тока, протекающего через электролит, в обоих случаях одинакова? Ответ обоснуйте.

15. (9) К электролитической ванне, содержащей слабый раствор серной кислоты, приложена разность потенциалов $U=40$ В. Выделяющийся на катоде газообразный водород собирается в сосуде объемом $V=400$ см^3. Через некоторое время давление водорода в сосуде достигает значения $p=1215$ гПа при температуре $t=20$ °С. Найдите работу, совершенную источником тока.

16. (13) Пройдя ускоряющую разность потенциалов $U=3,52\cdot10^3$ В, электрон влетает в однородное магнитное поле с индукцией $B=0,01$ Тл перпендикулярно линиям индукции и движется по окружности радиусом $R=2$ см. Вычислите отношение заряда электрона к его массе.

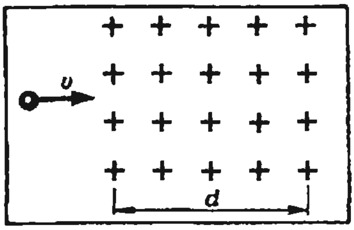


Рис. 9.

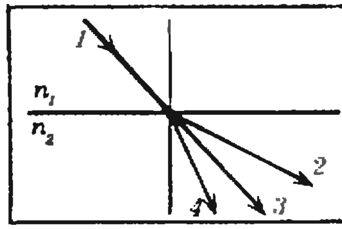


Рис. 10.

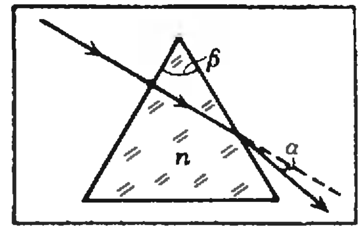


Рис. 11.

17. (10) Проводник длиной $l=0{,}5$ м и сопротивлением $R=0{,}025$ Ом движется поступательно в плоскости, перпендикулярной магнитному полю с индукцией $B=5\cdot10^{-3}$ Тл. По проводнику течет ток $I=4$ А. Скорость движения проводника $v=0{,}8$ м/с. Во сколько раз мощность, затраченная на нагревание проводника, больше мощности, затраченной на его перемещение в магнитном поле?

18. (9) Однозарядные ионы с массовыми числами $A_1=20$ и $A_2=22$ разгоняются в электрическом поле разностью потенциалов $U=4\times10^3$ В, затем попадают в однородное магнитное поле с индукцией $B=0{,}25$ Тл перпендикулярно к магнитным линиям и, описав полуокружность, вылетают двумя пучками. Определите расстояние между этими пучками.

19. (1) Однородное магнитное поле с индукцией B создано в полосе толщиной d (рис. 9). Пучок электронов направляется перпендикулярно полосе и линиям вектора магнитной индукции. При каких скоростях v электроны не пролетят на другую сторону полосы («отразятся» от «магнитной стенки»)?

20. (14) В однородном магнитном поле с индукцией B расположена замкнутая катушка с диаметром d и числом витков n. Плоскость катушки перпендикулярна к линиям индукции поля. Какой заряд пройдет по цепи катушки, если ее повернуть на 180°? Проволока, из которой намотана катушка, имеет площадь сечения S и удельное сопротивление ρ.

Колебания и волны

1. (11) Материальная точка совершает гармонические колебания согласно уравнению $x=2\sin\left(\frac{\pi}{3}t+\frac{\pi}{4}\right)$, в котором все величины заданы в единицах СИ. Определите период колебаний. Результат представьте в единицах СИ.

2. (10) Определите длину математического маятника, если известно, что при уменьшении длины нити на $\Delta l=5$ см частота колебаний маятника увеличивается в $k=1{,}5$ раза.

3. (5) Два маятника одновременно начинают колебаться. За один и тот же промежуток времени первый делает $N_1=20$, а второй $N_2=10$ колебаний. Определите отношение длин этих маятников.

4. (1) Тело, прикрепленное к пружине, вывели из равновесия и отпустили, в результате чего оно совершает гармонические колебания вдоль горизонтального стержня. Определите отношение кинетической энергии системы к ее потенциальной энергии по истечении времени t после начала колебаний, если их период равен T. Массой пружины можно пренебречь.

5. (10) На длинной нити подвешен металлический шарик массой $m=10$ г и положительным зарядом $q=1{,}6\cdot10^{-7}$ Кл. Определите: а) натяжение нити, если нить с шариком находится в однородном, направленном вертикально вверх электрическом поле напряженностью $E=10^5$ В/м; б) отношение периодов свободных колебаний, когда электрическое поле выключено и когда оно включено.

6. (10) На какую длину волны настроен приемник, если его приемный контур обладает индуктивностью $L=0{,}003$ Гн и емкостью $C=3\cdot10^{-10}$ Ф ($c=3\cdot10^8$ м/с)?

7. (11) Определите период свободных электромагнитных колебаний в контуре с индуктивностью $L=10$ мкГн и емкостью $C=10$ мкФ. Результат представьте в микросекундах и округлите до целого числа.

8. (5) Колебательный контур состоит из катушки с индуктивностью $L=0{,}2$ мкГн и переменного конденсатора, емкость которого может изменяться от $C_1=50$ до $C_2=450$ пФ. Какой диапазон частот и длин волн можно охватить настройкой этого контура?

9. (10) Контур содержит катушку и конденсатор. Во сколько раз увеличится период собственных колебаний в контуре, если параллельно конденсатору подключить еще 3 таких же конденсатора?

Оптика

1. (11) На границу раздела двух сред с показателями преломления n_1 и n_2 ($n_1<n_2$) падает параллельный пучок света в направлении луча *1* (рис. 10). В каком направлении (*2*, *3* или *4*) распространяется преломленный пучок света? Ответ обоснуйте.

2. (14) Сечение стеклянной призмы имеет форму равностороннего треугольника. Луч падает на одну из граней перпендикулярно к ней. Найдите угол между направлениями луча падающего и луча, вышедшего из призмы. Показатель преломления стекла $n=1{,}5$.

3. (13) На какую максимальную глубину можно погрузить в воду точечный источник света, чтобы квадратный плот со стороной $a=4$ м не пропускал света в пространство над поверхностью воды? Коэффициент преломления воды $n=1{,}33$, центр плота находится над источником света.

4. (8) Луч света падает на грань стеклянной призмы перпендикулярно к ее поверхности и выходит из противоположной грани, отклонившись от первоначального направления на угол α (рис. 11). Определите преломляющий угол призмы β, если показатель преломления стекла n.

5. (1) Пластинка состоит из нескольких плоскопараллельных слоев различных веществ. Луч света падает из воздуха на первый слой под углом α. Определите угол преломления в последнем слое, если показатель преломления вещества этого слоя n.

6. (1) Луч света падает нормально на боковую поверхность стеклянного клина. Каким должен быть угол клина для того, чтобы луч, отразившись от второй, посеребренной, поверхности клина и снова упав на его первую поверхность, испытал на ней полное отражение? Показатель преломления стекла n считайте известным.

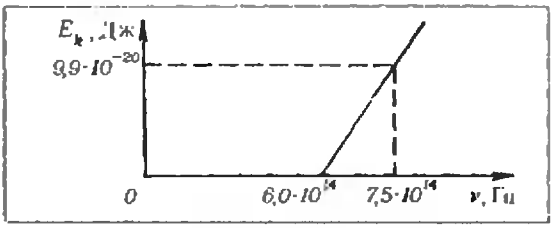


Рис. 12.

7. (10) Фокусное расстояние объектива проекционного аппарата $F=0{,}25$ м. Какое увеличение диапозитива дает проекционный аппарат, если экран удален от объектива на расстояние $f=4$ м?

8. (9) Точка движется со скоростью $v_1=1$ м/с перпендикулярно главной оптической оси собирающей линзы с фокусным расстоянием $F=20$ см, пересекая ось на расстоянии $d=60$ см от линзы. С какой скоростью движется изображение точки?

9. (1) Предмет в виде стержня расположен вдоль главной оптической оси тонкой собирающей линзы так, что его концы удалены от линзы на расстояния $d_1={}^3/_2\ F$ и $d_2={}^5/_4\ F$, где F — неизвестное фокусное расстояние линзы. Во сколько раз длина изображения больше длины самого предмета?

10. (1) На главной оптической оси на расстоянии $d=60$ см от собирающей линзы, фокусное расстояние которой $F=40$ см, расположен точечный источник света. Линзу по диаметру разрезали на две половины и симметрично развели их на расстояние $r=1$ см в направлении, перпендикулярном главной оптической оси. На каком расстоянии друг от друга будут расположены изображения источника, полученные в половинах линзы?

11. (14) На каком расстоянии от глаза надо держать маленький предмет при рассматривании его в лупу с фокусным расстоянием $F=2$ см? Какое при этом получится увеличение? Лупа находится на расстоянии $l=5$ см от глаза, изображение — на расстоянии наилучшего зрения $d_0=25$ см.

12. (1) На рисунке 12 приведен график зависимости кинетической энергии E_k электронов, вылетающих с поверхности бария при фотоэффекте, от частоты ν облучающего света. Используя график, рассчитайте постоянную Планка и работу выхода электрона из бария.

13. (9) Цинковую пластинку (работа выхода из цинка $A=6{,}4\cdot10^{-19}$ Дж) освещают монохроматическим светом с длиной волны, соответствующей переходу электрона в атоме водорода между уровнями с энергией $W_1=-0{,}38$ эВ и $W_2=-13{,}6$ эВ. Определите, на какое максимальное расстояние от пластинки может удалиться фотоэлектрон, если вне ее имеется задерживающее (то есть возвращающее электроны обратно к металлу) однородное электрическое поле напряженностью $E=10$ В/см.

14. (11) Определите электрическую мощность атомной электростанции, расходующей в сутки $m=220$ г урана $^{235}_{92}U$ и имеющей КПД $\eta=25\%$, если известно, что при делении одного ядра урана выделяется энергия, в среднем равная $W_0=3{,}2\cdot10^{-11}$ Дж. Результат представьте в мегаваттах (1 МВт$=10^6$ Вт) и округлите до целого числа. Постоянная Авогадро $N_A=6{,}02\cdot10^{23}$ моль$^{-1}$.

Публикацию подготовили *А. А. Егоров, В. А. Тихомирова*

Список читателей, приславших правильные решения

(Начало см. на с. 46)

94, 97; *М. Кудряшев* (Москва) **02**; *М. Кузин* (Коломна) **99**; *Д. Кучулория* (Тбилиси) **96**; *П. Линник* (ст. Анапская Краснодарского кр.) **93, 95**; *Ю. Литвиненко* (Воронеж) **96**; *К. Лопин* (Фрунзе) **93**; *Д. Лунц* (Саратов) **93—97, 99, 00**; *П. Лушников* (Москва) **93, 95—97, 01, 02, 04**; *О. Мазяр* (Львов) **96, 02, 06**; *И. Маресин* (Москва) **06**; *Г. Марченков* (Саратов) **95**; *А. Мастыкин* (Минск) **94**; *Ю. Махлин* (Москва) **00, 02, 06**; *С. Машкевич* (Киев) **93, 95, 96, 00—02, 06**; *А. Медведев* (Горький) **06**; *В. Меньков* (Мончегорск) **93—96, 99, 01, 02—04, 06, 07**; *А. Микалькявичюс* (Паневежис) **94, 96, 99, 00**; *С. Минаев* (Свердловск) **93—95**; *Т. Мисирпашаев* (Москва) **99, 00, 02, 06, 07**; *А. Михеев* (Москва) **93, 96, 97**; *В. Моравецкий* (Киев) **99, 06**; *О. Мороз* (Алма-Ата) **02**; *А. Муравьева* (Брест) **99**; *С. Мягчилов* (Одесса) **93—03, 06, 07**; *А. Недачин* (Киев) **99**; *С. Никоненко* (Киев) **93, 95, 97, 99, 02, 06**; *С. Оганесян* (Баку) **04**; *Н. Овчаренко* (Киев) **04, 06**; *Е. Однорогова* (Винница) **01**; *А. Онуфриев* (Москва) **93, 00, 02, 06**; *О. Осауленко* (Киев) **93, 95, 99, 00, 04**; *С. Павлик* (Ужгород) **93**; *Р. Паламарчук* (Нежин) **96, 06**; *А. Панычев* (Магадан) **06**; *Б. Парканский* (Кишинев) **93, 94**; *Д. Пастухов* (Витебск) **93, 96, 97, 99, 01, 02**; *А. Перепеличный* (Владимир-Волынский) **96, 06**; *С. Пиунихин* (Москва) **95**; *О. Посудневский* (Береза) **06**; *В. Прибытков* (Находка) **06**; *А. Приходовский* (Береза) **06**; *С. Рахамов* (Казань) **95—02**; *Р. Ривкин* (Минск) **02, 07**; *А. Ростов* (Винница) **96, 02, 04**; *С. Рося* (Минск) **99, 00, 07**; *М. Рудык* (Винница) **93, 02**; *Ю. Рыбалочка* (Киев) **96, 99, 01, 02, 04, 06**; *М. Савченко* (Белгород) **95, 96, 99, 00, 02**; *Т. Сагайдак* (Каиев) **94, 95, 04**; *В. Сакбаев* (Алма-Ата) **96, 06, 07**; *Б. Самойлов* (Киев) **96, 97, 99, 02**; *В. Сандомирский* (Братск) **99, 06**; *А. Сиваченко* (Москва) **06**; *М. Скоробогатов* (Киев) **93, 95—97, 99, 00, 02—04, 06, 07**; *С. Собесский* (Новосибирск) **95, 99**; *А. Сомов* (Киев) **93**; *Г. Спивак* (Киев) **93, 94, 96, 02**; *С. Степанянц* (Ереван) **93, 97, 02, 04**; *И. Струговщиков* (Киев) **93, 96**; *Б. Сулейманов* (Баку) **93—97**; *Р. Суник* (Киев) **93**; *В. Тартаковский* (Киев) **93, 95—97, 99, 00, 02, 06**; *И. Терез* (Симферополь) **93, 94, 96, 97, 99, 00, 02**; *П. Трусевич* (Сердобск) **96**; *С. Тужанский* (Винница) **99, 02**, *А. Тюрин* (Николаев) **02**; *Д. Углов* (Геленджик) **96**; *Е.* и *Т. Уклистые* (Астрахань) **96**; *Р. Ульмасов* (Душанбе) **93**; *М. Уманский* (Москва) **95**; *А. Ужнов* (Миасс) **93, 96, 00**; *Н. Федин* (Омск) **93, 94, 96, 97, 99—02, 04, 06, 07**; *Л. Федичкин* (Москва) **93—95, 00, 02, 04, 06, 07**; *С. Феранчук* (Минск) **94, 96, 97, 99, 00, 02**; *С. Ферлегер* (Ташкент) **99, 00, 02**; *А. Фокин* (Москва) **93**; *В. Фурман* (Ташкент) **93—02, 06, 07**; *А. Цирс* (Апатиты) **93, 95—02**; *С. Чернышев* (Ташкент) **06**; *Г. Швец* (Киев) **93, 96, 00, 04, 06**; *Д. Шкловский* (Ленинград) **06**; *П. Шмидт* (Андижан) **00, 01**; *О. Яковлев* (Иркутск) **93—02**; *А. Ястребов* (Кировоград) **06**.

Задачи вступительных экзаменов в различные вузы в 1984 году

Математика

Письменный экзамен

Алгебра

1. 187. **2.** $2\frac{1}{4}$ ч. **3.** 10 ч., 15 ч. **4.** 62. **5.** 2360. **6.** 10 с. **7.** 5. **8.** а) $a-c$; б) $1/ab$; в) 2. **9.** $-5{,}625$. **11.** а) 97/98; б) $-\frac{1}{10}(3\sqrt{3}+4)$. **12.** $\frac{2}{\sin\alpha}$, $\frac{10}{3}$. **13.** $\frac{\sqrt{5}}{6}(2+\sqrt{6})$ при $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$; $-\frac{\sqrt{5}}{6}(2+\sqrt{6})$ при $\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$. **14.** $\{6\}$. **15.** а) $\{-1{,}1;\ 1{,}1\}$; б) $\{-15\}$; в) $\{3\}$; г) $\{\log_5(6+\sqrt{37}),\ \log_5(\sqrt{2}-1)\}$; д) $\{-1,\ 2,\ 3,\ 4\}$; е) $\left\{\frac{1}{\sqrt{10}},\ 100\right\}$; ж) $\{-3\}\cup[1;\ +\infty[$; з) $\{2-\sqrt{33};\ 3\}$; и) $\{-3,\ -2,\ 1\}$; к) $\{1/2,\ 4\}$; л) $\{10^{-2};\ 10^{2}\}$; м) $\{2\}$; н) $x_1=\pi/4+\pi k$, $x_2=\operatorname{arctg}2+\pi l$ $(k,\ l\in Z)$; о) $x_1=\pi k$, $x_2=\frac{\pi}{8}(2l+1)$ $(k,\ l\in Z)$; п) $x_1=\frac{\pi}{6}(8k+1)$, $x_2=\frac{\pi}{2}(4l-1)$ $(k,\ l\in Z)$; р) $x=\frac{\pi}{10}(2k+1)$ $(k\in Z)$; с) $x_1=\pi(2k+1)$, $x_2=\pm2\arccos\frac{1}{3}+4\pi l$ $(k,\ l\in Z)$; т) $x=\operatorname{arctg}2+\pi k$ $(k\in Z)$; у) $x=\frac{\pi}{8}(4n\pm1)$ $(n\in Z)$; ф) $x_1=\frac{\pi}{2}(2k+1)$, $x_2=(-1)^l\frac{\pi}{6}+\pi l$, $x_3=\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi m$ $(k,\ l, m\in Z)$; х) $x_1=\frac{\pi}{6}(4k+1)$; $x_2=2\pi l$ $(k,\ l\in Z)$; ц) $x=\frac{\pi}{4}(4k+1)$ $(k\in Z)$; ч) $x=\frac{\pi}{4}(4k-1)$ $(k\in Z)$; ш) $x=\frac{\pi}{3}(6k+1)$ $(k\in Z)$. **16.** $x_1=\frac{\pi}{2}(2k+1)$, $x_2=\frac{\pi}{18}(12l+1)$, $x_3=\frac{\pi}{18}(12m+5)$ $(k,\ l,\ m\in Z/\{-1,\ 0\})$. **17.** $\{(2,\ -2+k\pi),\ (-2,\ 2+l\pi)\}$ $(k, l\in Z)$. **18.** 5. **19.** $\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$. **20.** 2. **21.** $x=1$. **22.** $k=1$. **23.** $a=2$. **24.** $a=0$. **25.** а) $\{(1,\ 2),\ (-1,\ -2)\}$; б) $\{(3,\ -5),\ (-3,\ -5)\}$; в) $\{(1,\ 9),\ (9,\ 1)\}$; г) $\{(4,\ 3),\ (-4,\ -3)\}$; д) $\left\{\left(\frac{1}{8},\ -2\right),\ (4,\ 3)\right\}$; е) $(1,\ 3)$. **26.** а) $]-\infty;\ 0[\ \cup\ [2;\ 3]$; б) $[-2;\ 0[\ \cup\ ]2;\ 4]$; в) $]-\infty;\ -8]\cup]-3;\ 0[\cup]0;\ 1[$. **27.** а) $]3/2;\ +\infty[$; б) $]-\infty;\ 0]$; в) $]-\infty;\ -\log_3 2]\cup\left[\log_3\frac{3}{5};\ \log_3\frac{5}{3}\right[$. г) $]-\infty;\ -1[\cup]1;\ +\infty[$; д) $]-\infty;\ -9[\cup]5;\ +\infty[$; е) $\left]0;\ \frac{1}{16}\right]\cup\left[\frac{1}{4};\ 1\right[$; ж) $\left]-\infty;\ \frac{1}{9}\right[$; з) $\varnothing$; и) $]1;\ 2[$; к) $]-\infty;\ -2[\cup]6;\ +\infty[$; л) $]-2;\ -1[\cup]-1;\ 0[\cup]0;\ 1[\cup]2;\ +\infty[$; м) $\left]1;\ \frac{1+\sqrt{1+4a^2}}{2}\right[$ при $a\in]0;\ 1[$, $\left]\frac{1+\sqrt{1+4a^2}}{2};\ +\infty\right[$ при $a\in]1;\ +\infty[$; н) $]-\infty;\ -\log_a(a+2)[$ при $a\in]0;\ 1[$, $]-\log_a(a+2);\ +\infty[$ при $a\in]1;\ +\infty[$. **28.** $p\in]1;\ 2[$. **29.** $a=20$. **30.** См. рис. 1. **31.** в) См. рис. 2; б) см. рис. 3.

Анализ

1. 10. **2.** $v_{max}=36$ м/с. **3.** $y=8x-6$ и $y=-8x-6$. **5.** а) убывает при $x\in]-\infty;\ -4[$ и $x\in]0;\ 1[$; возрастает при $x\in]-4;\ 0[$ и $x\in]1;\ +\infty[$; $x=-4$ и $x=1$ — точки минимума, $x=0$ — точка максимума; б) возрастает при $x\in]-1;\ 1[$, убывает при $x\in]-\infty;\ -1[$ и $x\in]1;\ +\infty[$. При $x=-1$ — минимум; при $x=1$ — максимум. **6.** а) $y_{min}=y(3)=-57$; $y_{max}=y(6)=132$; б) $y_{min}=y(\pi/4)=15-2\sqrt{2}$, $y_{max}=y(\pi/2)=15$. **7.** $\{0,\ \pi/6,\ 5\pi/6,\ \pi\}$. **8.** $a=3$. **9.** $c\in[12;\ 14]$. У к а з а н и е. Неравенство $f'(x)=3(c-12)x^2+6(c-12)x+6\geqslant0$ должно выполняться при всех x, то есть при $c>12$ и $D/4=(c-12)^2-2(c-12)\leqslant0$.

10. $z_{max}=\sqrt{5}$, $z_{min}=-\sqrt{5}$. У к а з а н и е. Наибольшее и наименьшее z соответствуют случаям, когда прямая $y=3x-z$ касается окружности $x^2+y^2=1/2$.

Геометрия

1. $2(\vec{a}-\vec{b})$. **2.** $2(2+\sqrt{3})r$; $\frac{2(2+\sqrt{3})}{\sqrt{3}}r$.

3. Р е ш е н и е (рис. 4). Пусть r — радиус

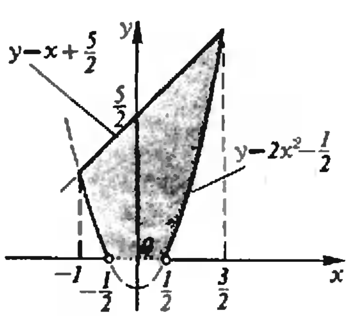


Рис. 1.

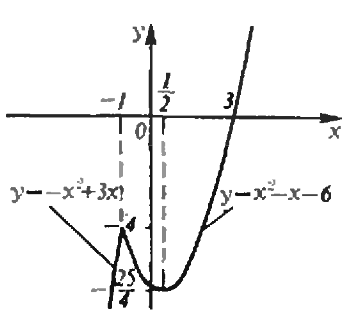


Рис. 2.

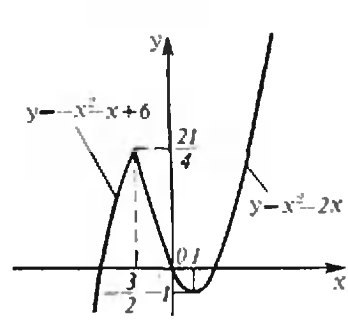


Рис. 3.

вписанной окружности. Тогда $|DC|=|FC|=r$, $|AD|=|AE|=b-r$, $|BF|=|BE|=a-r$. Поэтому $|AE|\cdot|BE|=ab-(a+b)r+r^2=ab-r\times$ $\times(a+b-r)=ab-rp=2S-S=S$.

4. $R^2\sqrt{3}/2$. 5. 9/4. 6. 4,5. 7. $-\cos 2\varphi$ при $\pi/4<\varphi<\pi/2$. 8. $|BD|=|CD|$. Указание. Пусть $|FD|=x$, $|DE|=y$. Тогда $S=S_{ABC}=$ $=\frac{1}{2}cx+\frac{1}{2}by$, откуда $y=\frac{2S-cx}{2}$. Осталось исследовать на максимум функцию $xy=$ $=\frac{x(2S-cx)}{2}$. 9. $2\mathrm{arctg}\sqrt{3}/2$. 10. $a^2\sqrt{3-\cos^2\alpha}/$ $/8\cos\alpha$. 11. 30°. 12. 1000. 13. $\frac{Q\sqrt{Qmn}}{m^2+n^2}$. 14. $\frac{1}{2}m^3\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}\cdot\mathrm{tg}\,\beta$. 15. $\arccos\frac{\sqrt{6}}{4}$. 16. $\frac{3V}{\pi R}$. 17. $2\pi d^2\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}$. 18. $12\pi l^3/125$. 19. $\frac{1}{\sqrt{\pi}}\times$ $\times\left(\frac{S\cos\alpha}{1+\cos\alpha}\right)^{3/2}\mathrm{tg}\,\alpha$. 20. $(1/4)\mathrm{ctg}\,\alpha\cdot\mathrm{ctg}^3\times$ $\times\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)$. 21. $(1/4)\sin^3 2\alpha\cdot\mathrm{tg}\,\alpha$. 22. $\alpha=$ $=2\mathrm{arctg}\sqrt{\frac{1\pm\sqrt{1-2q}}{2}}$; $0<q<1/2$. 23. $8R^2\mathrm{ctg}^2\frac{\alpha}{2}\cdot\cos^2\frac{\alpha}{2}/\cos\alpha$. 24. $a^2\sqrt{3}/4\cos\alpha$. 25. $r/3$. Указание. Центры четырех шаров, о которых идет речь в условии задачи, образуют правильную треугольную пирамиду со стороной основания $2r$, высотой $r-x$ и боковым ребром $r+x$, где x — радиус четвертого шара. 26. Указание. Центр описанной сферы проектируется на каждую грань в центр описанной около этой грани окружности. Поскольку радиусы описанных окружностей одинаковы, центр описанной сферы одинаково удален от всех граней пирамиды. 27. Указание. Все диагональные плоскости такого параллелепипеда являются прямоугольниками.

Устный экзамен

1. 2, 6, 18. 2. 5/3, 10/9. 3. 1/4. 4. 1,1. 5. $7\sqrt{2}/10$. 6. Между −2 и −1. 7. Решение. $\log_\pi 2+\log_\pi 5=\log_\pi 10>\log_\pi\pi^2=2$. 8. 3/2. 9. а) ∅; б) {7; 8}; в) {0; 3}; г) $\{\log_4((\sqrt{29}-5)/2)$, $\log_4((1+\sqrt{5})/2)\}$. Указание. Выполните замену $y=4^x-\frac{1}{4^x}$; д) $\{-11, -5-\sqrt{14}, -5+\sqrt{14}, 1\}$. Указание. Уравнение эквивалентно такому: $(x(x+10))^2=11^2$, откуда либо $x^2+10x-11=0$, либо $x^2+10x+11=0$; е) {1; 2}; ж) $x=$ $=\pm\frac{\pi}{3}+k\pi$, $(k\in Z)$; з) $x_1=\frac{\pi}{2}(2k+1)$, $x_2=$ $=\frac{\pi}{4}+(-1)^l\frac{\pi}{6}+\pi l$, $(k, l\in Z)$. 10. $\{-3\pi/4\}$. 11. $x_1=\pi k$, $x_2=\frac{\pi}{6}(6l\pm1)$ $(k, l\in Z)$. 12. а) (3; 5), (5; 3)}; б) {(2, 1), (1; 2), (−1; −2), (−2; −1)}. 13. а)]−∞; −2[∪]−1/3; +∞[; б)]−1; 2[∪]3; 6[; в) [−1/4; 3/4[; г) [−2; −1]∪[4; +∞[. д)]0; 1[∪]$\sqrt{3}$; 9[. 14. $\left]\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right[$. 15. а)]−∞; −4]∪[4; +∞[; б)]4; 4,5[∪]4,5; 7]; в)]−∞; 0]; г) [−5; −4[∪]−4; −3[. 16. $p=q=0$; $p=q=-\frac{1}{2}$; $p=1$, $q=-2$. 17. $a=2$, $-3<x\leqslant2$. 18. а) См. рис. 5; б) см. рис. 6; в) см. рис. 7.

Анализ

1. {1}. 2. $y_{\min}=y(\pi/4)=15-2\sqrt{2}$; $y_{\max}=$ $=y(\pi/2)=15$. 3. а) Возрастает при $x\in]-\infty;$ $1/5]$ и при $x\in[1; +\infty[$. Убывает при $x\in[1/5;$

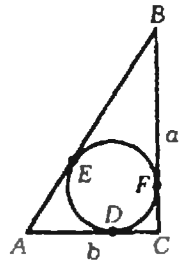


Рис. 4.

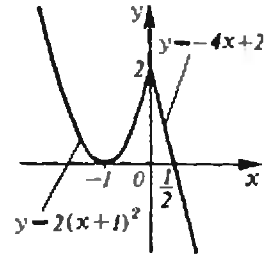


Рис. 5.

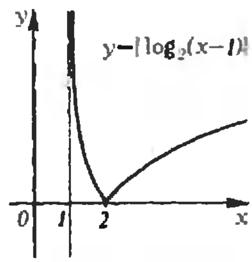


Рис. 6.

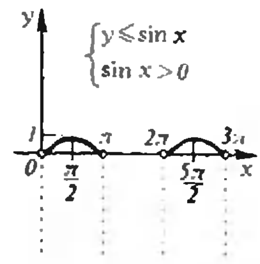


Рис. 7.

1]; б) возрастает при $x\in[2; +\infty[$; убывает при $x\in]-\infty; 2]$. 4. Указание. $y'=5x^4+8>0$.

Геометрия

1. (−1; −3). 2. $\vec{AB}=\vec{c}+2\vec{b}$; $\vec{AC}=2\vec{c}+\vec{b}$. 3. 18,5. 4. $a-r+\frac{ar}{a-2r}$. 5. 5/3. 6. $\pi/6$. 7. 4. 8. $\frac{Q\cos\alpha}{1+\cos\alpha}$; 12.

Физика

Механика

1. $a=(v_2^2-v_1^2)/(2l)=8$ м/с².
2. $l=5(gt^2/2)=25$ м (здесь $t=1$ с).
3. $v_0=\sqrt{2E_k/m}-gt=40$ м/с.
4. а) $t=\sqrt{2h/g}\approx1{,}8$ с; б) $l_{3-4}=3$ м.
5. $h_A=gt_1t_2/2$.
6. а) $t=\sqrt{2h/g}\approx10$ с; б) $t=\frac{v_0}{g}+$ $+\sqrt{\left(\frac{v_0}{g}\right)^2+\frac{2h}{g}}\approx10{,}6$ с.
7. $v_0=\sqrt{gl^2/(2h)}=10$ м/с.
8. $V>V_п>(1-\rho_в/\rho_ж)$.
9. $m_м=m\frac{(\rho_в/\rho_д)-(\rho_в/\rho_ж)}{1-\rho_в/\rho_м}\approx0{,}27m$ (здесь $\rho_в=1$ г/см³ — плотность воды).
10. $H=h\frac{\rho_д-\rho_ж}{\rho_ж}\frac{D^2}{d^2}$.
11. $h=\frac{\sigma_{пр}}{(\rho_c-\rho_в)g}\approx7{,}2\cdot10^3$ м=7,2 км.
12. $V_1/V=(\rho_2-\rho)/(\rho_2-\rho_1)$.
13. $v=\frac{5}{4}v_0$.
14. $a_1=8g\frac{8m_1-m_2}{64m_1+m_2}$; $a_2=g\frac{8m_1-m_2}{64m_1+m_2}$; $\frac{m_1}{m_2}=\frac{1}{8}$.
15. $F_{\min}=mg/\mu=600$Н.
16. $t_{\min}=v/(\mu g)=10$ с; $s_{\min}=v^2/(2\mu g)=100$ м.
17. $h=lv^2/(Rg)=0{,}084$ м=8,4 см.
18. $F_{\max}=mg\left(3-2\cos\frac{\alpha}{2}\right)$, где $\alpha=2$ рад.
19. $F=m(g-(v_0^2+al)/R)\approx8{,}5\cdot10^3$ Н.
20. $\alpha_{\min}=\arcsin(r/(\mu R))$.
21. $A=(m_1+m_2)g(l_2-l_1)/2$.

22. $H=\dfrac{(v-M\sqrt{2gh}/m)^2}{2g}$.

23. а) $\Delta E_p=m_1gl(1-\cos\alpha)=100$ Дж; б) $H=lm_1^2(1-\cos\alpha)/(m_1+m_2)^2=0{,}16$ м.

24. $v=\sqrt{2gl(1-\cos\alpha)/3}$.

25. $\alpha_1=12°$; $\alpha_2=24°$.

Молекулярная физика. Тепловые явления

1. $v_в/v_к=\sqrt{M_к/M_в}=4$.

2. $m=\rho V\left(1-\dfrac{p}{p_a+\rho gh}\right)=6$ кг.

3. Да, диссоциация произошла.

4. $T_3=T_2^2/T_1$.

5. $p=p_0\dfrac{T}{T_0}+\dfrac{mRT}{MV}\approx1{,}89\cdot10^5$ Па.

6. Нет, не вся вода превратится в пар.

7. $A=\eta mq(1-T_2/T_1)\approx1{,}6\cdot10^9$ Дж.

8. $v=\sqrt{2(c(T_п-T)+\lambda)}\approx346$ м/с.

9. $\Delta m=m_0\dfrac{s}{s_0}-\dfrac{N\tau}{q\eta/100\%}=9{,}6$ кг.

Основы электродинамики

1. $l=\Delta l(2+\sqrt{2})\approx170$ см$=1{,}7$ м.

2. $d=4qU/(3mg)\approx7\cdot10^{-3}$ м$=7$ мм.

3. $U'=3U/\varepsilon\approx278$ В.

4. $h=H\dfrac{\rho}{\rho_0}+\dfrac{Q^2}{2\varepsilon_0\varepsilon S^2\rho_0 g}$.

5. $\mathscr{E}=\dfrac{4U_1U_2}{5U_1-U_2}\approx27$ В.

6. $I=\dfrac{I_3(I_1^2+I_2I_2+I_2^2)}{I_3(I_1+I_2)-I_1I_2}\approx5{,}4$ А.

7. $0{,}75R<R_{кв}<R$.

8. $r=\sqrt{R_1R_2}=6$ Ом.

9. $\eta=1-rI/\mathscr{E}$; см. рис. 8.

10. $P'=P_1(P-P_1)/P$.

11. а) $Q=I^2R\tau=24\,000$ Дж$=24$ кДж; б) $k=1+Q/(cmT)=1{,}4$.

12. $\mathscr{E}=\dfrac{q^2I_0}{C(qI_0-PC)}\approx51{,}1$ В.

13. $P_2/P_1=1/9$.

14. Веществу с более высоким значением электрохимического эквивалента соответствует график *1* (см. рис. 8 в статье).

15. $A=2UpVF/(RT)\approx1{,}5\cdot10^5$ Дж (здесь $F=96\,500$ Кл/моль — постоянная Фарадея, $R=8{,}31$ Дж/(моль · К) — универсальная газовая постоянная).

16. $\dfrac{e}{m}=\dfrac{2U}{B^2R^2}=1{,}76\cdot10^{11}$ Кл/кг.

17. $\dfrac{N_1}{N_2}=\dfrac{IR}{lBv}=50$.

18. $x=\dfrac{2\sqrt{2}}{B}\sqrt{\dfrac{m_0U}{e}}(\sqrt{A_2}-\sqrt{A_1})\approx16\cdot10^{-3}$ м$=16$ мм (здесь $m_0=1{,}67\times10^{-27}$ кг — атомная единица массы, $e=1{,}6\cdot10^{-19}$ Кл — заряд одновалентного иона).

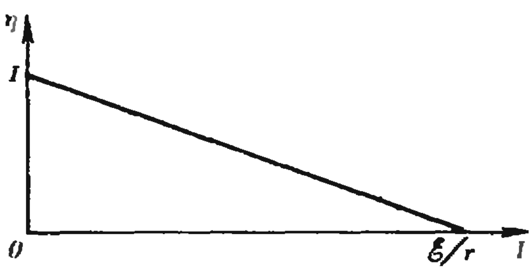


Рис. 8.

19. $v<eBd/m$.

20. $q=BdS/(2\rho)$.

Колебания и волны

1. $T=6$ с.

2. $l=\Delta l\dfrac{k^2}{k^2-1}=9\cdot10^{-2}$ м$=9$ см.

3. $l_2/l_1=(N_1/N_2)^2=4$.

4. $\dfrac{E_k}{E_p}=\mathrm{tg}^2\left(\dfrac{2\pi}{T}t\right)$.

5. а) $T=mg-qE=8{,}1\cdot10^{-2}$ Н;

б) $\dfrac{T_1}{T_2}=\sqrt{1-\dfrac{qE}{mg}}=0{,}9$.

6. $\lambda=2\pi c\sqrt{LC}\approx1{,}8\cdot10^3$ м.

7. $T=2\pi\sqrt{LC}\approx63$ мкс.

8. $\nu_1=\dfrac{1}{2\pi\sqrt{LC_1}}\approx5\cdot10^7$ Гц; $\nu_2=\dfrac{1}{2\pi\sqrt{LC_2}}\approx1{,}7\cdot10^7$ Гц; $\lambda_1=\dfrac{c}{\nu_1}\approx6$ м; $\lambda_2=\dfrac{c}{\nu_2}\approx18$ м.

9. $T_2/T_1=\sqrt{C_2/C_1}=2$.

Оптика

1. Согласно закону преломления света, преломленный луч распространяется в направлении 4 (см. рис. 10 в статье).

2. $\varphi=60°$.

3. $h=a\sqrt{n^2-1}/2\approx1{,}7$ м.

4. $\beta=\mathrm{arctg}\left(\dfrac{\sin\alpha}{n-\cos\alpha}\right)$.

5. $\beta=\arcsin\left(\dfrac{\sin\alpha}{n}\right)$.

6. $\dfrac{\pi}{4}>\varphi>\dfrac{1}{2}\arcsin\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

7. $\Gamma=f/F-1=15$.

8. $v_2=v_1F/(d-F)=0{,}5$ м/с.

9. $l'/l=8$.

10. $l=\dfrac{dr}{d-F}=3$ см.

11. $x=\dfrac{d_0(F+l)-l^2}{d_0-l+F}\approx6{,}8$ см; $\Gamma=\dfrac{d_0}{x-l}\approx14$.

12. $h=\dfrac{E_k}{\nu-\nu_{min}}=\dfrac{9{,}9\cdot10^{-20}\,Дж}{1{,}5\cdot10^{14}\,Гц}=6{,}6\cdot10^{-34}$ Дж · с; $A=h\nu_{min}\approx4\cdot10^{-19}$ Дж.

13. $d=(W_1-W_2-A)/(eE)=9{,}2\cdot10^{-3}$ м$=9{,}2$ мм.

14. $P=\dfrac{\eta W_0mN_A}{Mt}\approx52$ МВт (здесь $M=235\cdot10^{-3}$ кг/моль — молярная масса урана, $t=1$ сут$=24\cdot60\cdot60$ с).

С помощью обратной функции

(см. «Квант» № 5)

1. а) $x\cdot\arcsin x+\sqrt{1-x^2}$; б) $x\cdot\ln x-x$.

2. а) $\dfrac{1}{2}[x^2+x\sqrt{x^2-1}-\ln(\sqrt{x^2-1}+x)]$;

б) $\dfrac{1}{2}[x\sqrt{x^2-1}-\ln(\sqrt{x^2-1}+x)]$. Указание. $\sqrt{x^2-1}=(\sqrt{x^2-1}+x)-x$.

3. а) $\pi-1$; б) $\dfrac{\pi}{4}$; в) $3\ln2-\dfrac{3}{2}$; г) $\sqrt{2}+\dfrac{1}{2}\ln(3-2\sqrt{2})$. Указание. $\dfrac{y^2}{1-y^2}=\dfrac{1}{2(1+y)}+\dfrac{1}{2(1-y)}-1$.

Избранные школьные задачи
(см. «Квант» № 5)

1. $1-1/2+1/3-1/4+\ldots+1/99-1/100=1+1/2+1/3+\ldots+1/100-2(1/2+1/4+1/6+\ldots+1/100)=1+1/2+1/3+\ldots+1/100-(1+1/2+1/3+\ldots+1/50)=1/51+1/52+\ldots+1/100$.

2. а) 69999. Решение. Пусть число a, имеющее сумму цифр k, оканчивается в точности n девятками ($n=0, 1, 2, \ldots$). Тогда сумма цифр числа $a+1$ равна $k+1-9n$. Поэтому $9n-1$ должно делиться на 7. Наименьшее такое n равно 4. Далее, подбором находим ответ. б) Среди 13 последовательных натуральных чисел a как минимум 7 принадлежат одному и тому же десятку, суммы их цифр — семь последовательных натуральных чисел, поэтому одна из них делится на 7. Число 13 в условии задачи нельзя заменить меньшим: среди 12 чисел 994, 995, ..., 1005 нет ни одного с суммой цифр, делящейся на 7.

3. $S/30$. Решение. Проведем $MN \parallel AC$ (рис. 9). Тогда $MN=\frac{1}{2}LC$. С другой стороны, треугольники AKL и MKN подобны, откуда $AL/MN=AK/MK=1/2$. Следовательно, $AL=MN/2=CL/4$, то есть $AL=AC/5$. Далее, $S_{AMC}=\frac{1}{2}S$, $S_{AKC}=S_{AMC}/3=S/6$, наконец, $S_{AKL}=S_{AKC}/5=S/30$.

4. $x=y=z=1$ или $x=y=z=-1$. Решение. Вычитая из первого уравнения второе, получим

$$x^2+y^2+z^2-xy-yz-xz=0,$$

откуда $(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2=0$, но это означает, что $x=y=z$.

5. Пусть требуемый треугольник ABC построен, A' и A'' — точки, симметричные точке A относительно сторон угла (рис. 10). Поскольку $A'B=AB$, $A''C=AC$, периметр треугольника ABC равен длине ломаной $A'BCA''$. Поэтому периметр будет наименьшим в том случае, когда B и C — точки пересечения $A'A''$ со сторонами угла (рис. 11).

6. Разложим $x^3+y^3+z^3-3xyz$ на множители, одним из которых окажется $x+y+z$. Имеем: $x^3+y^3+z^3-3xyz=(x+y)^3+z^3-3xy(x+y+z)=(x+y+z)((x+y)^2-(x+y)z+z^2)+(x+y)^2-3xy)=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-xz)$.

7. $2\sqrt{m_1^2+m_2^2}/3$. Решение. Площадь четырехугольника $ABMN$ (рис. 12) равна $\frac{1}{2}m_1m_2\sin\alpha$, где α — угол между диагоналями AM и BN этого четырехугольника. С другой стороны, $S_{ABMN}=S_{ABC}-S_{NMC}=\frac{3}{4}S_{ABC}$, поэтому

$$S_{ABC}=4S_{ABMN}/3=2m_1m_2\sin\alpha/3.$$

Из условия следует, что $\sin\alpha=1$. Следовательно, медианы AM и BN перпендикулярны. Осталось применить теорему Пифагора к треугольнику.

8. $2^{2^{800}}>3^{3^{500}}$. Решение. Поскольку $2^{2^{800}}=4^{2^{799}}$, достаточно доказать, что $2^{799}>3^{500}$, то есть неравенство $2^{800}/3^{500}>2$. Имеем: $2^{800}/3^{500}=(256/243)^{100}=(1+13/243)^{100}$. Воспользуемся теперь несколько раз неравенством $(1+\alpha)^2>1+2\alpha$, верным для любого α. Получим $(1+13/243)^{100}>(1+26/243)^{50}>(1+52/243)^{25}>(1+52/243)^{24}>(1+104/243)^{12}>(1+208/243)^{6}>(1+416/243)^{3}>2^3>2$.

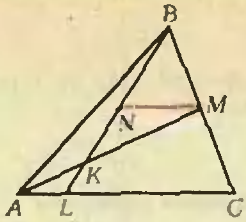


Рис. 9.

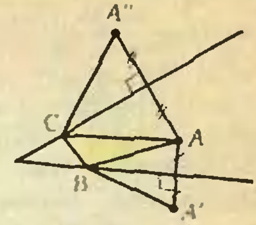


Рис. 10.

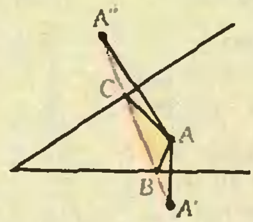


Рис. 11.

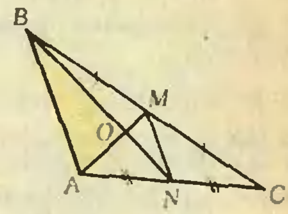


Рис. 12.

9. $a/\sqrt{3}$. Решение. Расстояние между скрещивающимися прямыми $A'D$ и $D'C$ равно расстоянию между содержащими их параллельными плоскостями $A'BD$ и $B'CD'$ (рис. 13). Для того чтобы найти это расстояние, докажем, что диагональ AC' перпендикулярна этим плоскостям. По теореме о трех перпендикулярах $(AC') \perp BD$ (так как $(BD) \perp (AC)$, а прямая AC — проекция прямой AC' на плоскость $ABCD$). Аналогично $AC' \perp A'D$, поэтому диагональ AC' перпендикулярна плоскостям $A'BD$ и $B'D'C$. Пусть она пересекает их в точках E и F соответственно. Поскольку параллельные отрезки AA' и DD' конгруэнтны, то равны и их проекции на прямую AC' — отрезки AE и EF. Точно так же доказывается, что $|EF|=|FC'|$. Итак, $|EF|=|AC'|/3$. Осталось заметить, что диагональ куба равна $a\sqrt{3}$ и что $|EF|$ и есть искомое расстояние.

10. 1:4. Решение. Обозначим $u=\sqrt{x}$, $v=3-\sqrt{x}$. Тогда $u+v=3$, а уравнение примет вид $\sqrt{1-u^4}=v^2$, откуда $u^4+v^4=17$. Следовательно, u и v удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} u^4+v^4=17, \\ u+v=3. \end{cases}$$

Для решения этой системы преобразуем сумму четвертых степеней: $u^4+v^4=(u^2+v^2)^2-2u^2v^2=(9-2uv)^2-2u^2v^2=17$. Решая полученное квадратное уравнение относительно uv, получим $uv=2$ или $uv=16$. Осталось решить две системы:

$$\begin{cases} u+v=3, \\ uv=16; \end{cases} \qquad \begin{cases} u+v=3, \\ uv=2. \end{cases}$$

Первая система решений не имеет. Решение второй: (1; 2) и (2; 1). Итак, либо $\sqrt{x}=1$, откуда $x=1$, либо $\sqrt{x}=2$, откуда $x=4$. Проверка показывает, что найденные значения x удовлетворяют уравнению.

11. $\pi/2+2\pi n$, $n \in Z$. Указание. Из неравенства $|2\sin^3 x\cos^3 4x| \leqslant 2|\sin x||\cos 4x| \leqslant \sin^2 x+\cos^2 4x$ следует, что либо $\begin{cases} \sin x=1 \\ \cos 4x=1, \end{cases}$ либо $\begin{cases} \sin x=-1, \\ \cos 4x=-1. \end{cases}$

12. а) Второе; б) первое. Решение. Для того чтобы выяснить, какое из двух чисел α^β и β^α ($\alpha>1$, $\beta>1$) больше, достаточно срав-

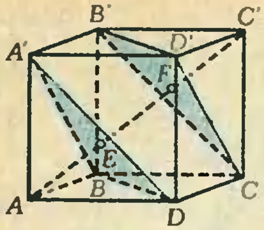


Рис. 13.

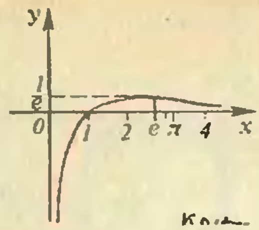


Рис. 14.

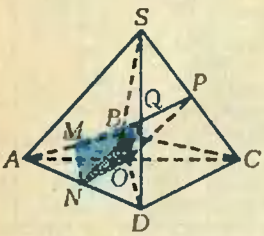


Рис. 15.

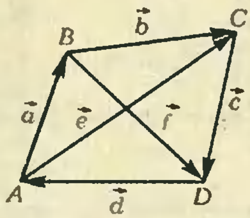


Рис. 16.

нить числа $\alpha\ln\beta$ и $\beta\ln\alpha$. Рассмотрим функцию $y=\ln x/x$ и построим ее график (рис. 14). Эта функция возрастает на $]0;\ e]$ и убывает на $[e,\ +\infty[$. Поскольку $e>1{,}0002>1{,}0001$, получаем, что $\ln 1{,}0002/1{,}0002>\ln 1{,}0001/1{,}0001$, и поэтому $1{,}0002^{1{,}0001}>1{,}0001^{1{,}0002}$. Так как $\pi>e$, получаем, что $\ln\pi/\pi<\ln e/e$, и поэтому $e^{\pi}>\pi^{e}$.

13. $v/16$. **Решение.** Из равенства площадей треугольников ABD и BCD следует, что $|AO|=|OC|$, где O — точка пересечения диагоналей четырехугольника $ABCD$ (рис. 15). Отрезки OP и QN — средние линии треугольников ASC и ASD, поэтому они параллельны прямой AS. Следовательно, прямые OP и QN параллельны и, значит, (OP) параллельна плоскости MQN. Отсюда вытекает, что тетраэдры $MNQP$ и $MNQO$ равновелики (у них общее основание MNQ, а длины высот равны, так как точки P и O одинаково удалены от плоскости MNQ). Вычислим теперь объем тетраэдра $MNQO$. В основании этого тетраэдра лежит треугольник MON, образованный средними линиями треугольника ABD. Площадь его равна $S_{ABD}/4=S_{ABCD}/8$. Расстояние от точки Q до плоскости $ABCD$ равно половине высоты пирамиды $SABCD$. Поэтому $V_{MNOQ}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{8}V_{SABCD}=V/16$.

14. Нет. **Доказательство.** Пусть $3=aq^k$, $5=aq^l$, $7=aq^m$, где $k<l<m$. Тогда $q^{k-l}=3/5$; $q^{k-m}=3/7$, откуда $(3/5)^{k-m}=(3/7)^{k-l}$, то есть $7^{l-k}=3^{m-l}\cdot 5^{m-k}$. Полученное равенство невозможно при натуральных $k,\ l,\ m$, так как его левая часть делится на 7, а правая — нет.

15. Пусть $ABCD$ — данный четырехугольник (рис. 16). Из условия следует, что

$$\vec a+\vec b+\vec c+\vec d=\vec 0, \qquad (1)$$

$$\vec a^2+\vec b^2+\vec c^2+\vec d^2=\vec e^2+\vec f^2. \qquad (2)$$

Так как $\vec e=\vec a+\vec b$, $\vec f=\vec b+\vec c$, получаем из (2), что $\vec a^2+\vec b^2+\vec c^2+\vec d^2=(\vec a+\vec b)^2+(\vec b+\vec c)^2$, откуда $\vec d^2=2\vec b(\vec a+\vec c)+\vec b^2$. Заменяя $\vec a+\vec c$ на $-(\vec b+\vec d)$ (из равенства (1)), получим $\vec d^2=-2\vec b\,\vec d-\vec b^2$, то есть $\vec d^2+2\vec b\,\vec d+\vec b^2=(\vec b+\vec d)^2=0$. Следовательно, $\vec b=-\vec d$, но это и означает, что $ABCD$ — параллелограмм.

Бег по кругу и длинный рассказ
(см. «Квант» № 2)

Задачи

1. Ответ: 20 лет. **Решение.** Прежде всего, ясно, что попугайчик родился в XX веке (сумма цифр любого номера года не больше чем $1+9+9+9=28$). Пусть x и y — последние две цифры года его рождения. Из условия следует, что $1984-19xy=1984-(1900+10x+y)=1+9+x+y$. Поэтому $11x+2y=74$. Поскольку x и y — цифры, причем x — четно, получаем $x=6$, $y=4$. Итак, попугайчик родился в 1964 году и ему исполнилось 20 лет.

2. Ответ. Найдутся. **Указание.** Пусть $x_1<x_2<x_3<x_4<x_5<x_6<x_7$ — возрасты данных 7 людей, причем $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6+x_7=100$. Предположим, что сумма возрастов любых трех из них не больше 49. Тогда $x_5+x_6+x_7<x_5+x_5+1+x_5+2<49$. Поэтому $3x_5<46$, то есть $x_5<15$. Отсюда следует, что $x_4<14$, но тогда $x_1<11$, $x_2<12$, $x_3<13$. Поэтому $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6+x_7<11+12+13+14+49=99<100$.

3. Ответ. Эду 2 года, Мыши 12 лет, Додо — 72 года. **Указание.** Пусть отношение возрастов Мыши и Эда равно k, а x — возраст Эда. Из условия следует, что $k^2x+kx=84$. Считая k целым числом и предполагая, что возрасты тоже выражаются целыми числами, получим, что 84 делится на x. Перебирая делители числа 84, находим, что $x=2$, откуда $k=6$.

4. Ответ: $1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot(n-1)=(n-1)!$, где n — число участников бега. Пусть всего участников бега — n. Сам Додо занимает какое-нибудь место (все равно какое). На круге остается $n-1$ место. Первого из участников он может поставить на любое из оставшихся $n-1$ мест, второго на оставшиеся $n-2$ места и т. д. Всего способов, таким образом, $(n-1)(n-2)\ldots1$.

5. Скорее 60 000 мышек съедят кошку!

6. Ответ: $\frac{a}{v}$. **Указание.** Из соображений симметрии ясно, что в каждый момент времени участники бега будут находиться в вершинах квадрата меньших размеров, чем исходный (см. рис. 17), как-то повернутого по отношению к исходному. Поэтому движение каждого бегуна можно представить себе так: он бежит по диагонали большого квадрата к его центру, а квадрат вращается вокруг своего центра. Скорость каждого из бегунов в любой момент времени направлена по стороне меньшего квадрата. Поэтому вдоль диагонали бегун движется со скоростью $v/\sqrt2$. Отсюда следует, что в точке O все бегуны окажутся через время $t=\frac{a/\sqrt2}{v/\sqrt2}=\frac{a}{v}$.

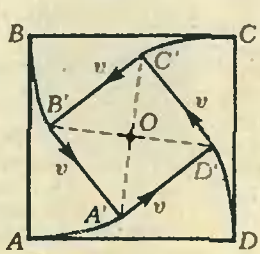


Рис. 17.

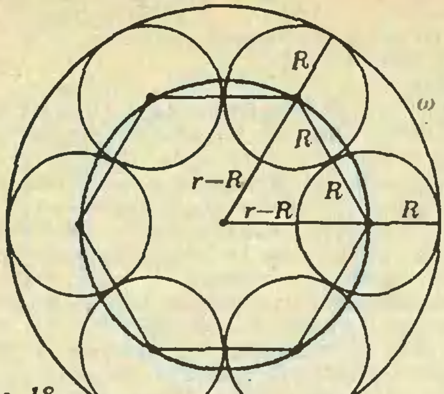


Рис. 18.

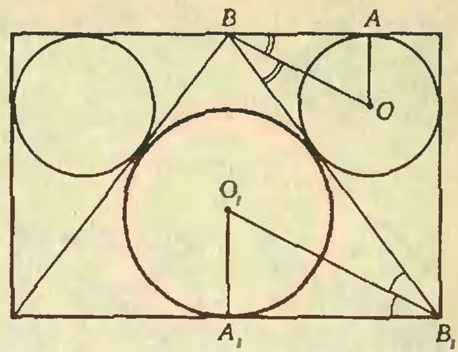


Рис. 19.

Наша обложка

(см. «Квант» № 5)

Задача с обложки прошлого номера служит отличной иллюстрацией того, как правильный выбор сечений (или проекций) позволяет свести стереометрическую задачу к нескольким планиметрическим.

Первое сечение (рис. 18) мы проведем через центры шести данных шаров — они удалены от верхнего основания цилиндра на одно и то же расстояние R, и поэтому лежат в одной плоскости, параллельной этому основанию. (Отметим, что рис. 18 можно рассматривать и как ортогональную проекцию цилиндра и шаров на плоскость основания.) Плоскость этого сечения пересекает поверхность цилиндра по окружности ω радиуса r, равного радиусу основания цилиндра, а шары — по шести кругам радиуса R, касающимся друг друга и окружности ω. Рассмотрим шестиугольник, образованный центрами этих кругов. Очевидно, он вписан в окружность радиуса $r-R$, концентрическую с окружностью ω, а все его стороны равны $2R$. Следовательно, этот шестиугольник правильный и радиус его описанной окружности равен стороне, то есть $r-R=2R$ или $r=3R$.

Теперь рассечем данную конфигурацию плоскостью, проходящей через ось цилиндра и центр O одного из данных шаров (рис. 19). В обозначениях рисунка 19 прямоугольные треугольники OAB и $O_1A_1B_1$ подобны (поскольку BO и B_1O_1 — биссектрисы равных углов ABB_1 и BB_1A_1), поэтому

$$\frac{O_1A_1}{A_1B_1}=\frac{OA}{AB}.$$

Но O_1A_1 — это искомый радиус, $A_1B_1=r=3R$, $OA=R$, а $BA=r-R=2R$. Отсюда получаем **ответ**: $O_1A_1=3R/2$.

Замечание. При построении второго сечения (рис. 19) мы опирались на полученное из рисунка 18 соотношение $r=3R$. На нашем чертеже оказалось, что красная окружность касается двух других (конечно, в решении этим фактом мы не пользовались). Читателям предлагается выяснить, действительно ли это так. А тех, кто не поленится вычислить длину образующей конуса и высоту цилиндра (которые также не понадобились в нашем решении), ждет приятный сюрприз.

В. Н., П. И.

Наша обложка

(см. «Квант» № 6)

Как и многие геометрические задачи на максимум и минимум, задача с 4-й страницы обложки этого номера решается аналитически: объем пересечения пирамид мы запишем в виде функции от некоторого числового параметра, а затем исследуем ее средствами математического анализа. Своеобразие данной задачи в том, что эта функция на разных участках будет задаваться разными формулами, так как вид многогранника пересечения существенно зависит от положения центра симметрии O.

Данную пирамиду обозначим $SABC$, симметричную — $S'A'B'C'$, их высоты — SH и $S'H'$. Прежде, чем начать вычисления, заметим, что когда точка O лежит на верхней половине высоты ($SO\leqslant SH/2$), основание каждой из наших пирамид не пересекает другой пирамиды (случай 1 на обложке). Следовательно, в этом случае пересечение пирамид совпадает с пересечением трехгранных углов $SABC$ и $S'A'B'C'$ и его объем будет тем больше, чем ниже расположена точка S', а наибольшего значения достигнет при $S'=H$ ($SO=SH/2$). Отметим, что здесь пересечение пирамид есть параллелепипед (как шестигранник с тремя парами параллельных граней).

Итак, в дальнейшем можно считать, что $SO>SH/2$. При этом условии плоскость $A'B'C'$ отсекает от данной пирамиды тетраэдр T_S, и так как она параллельна плоскости ABC, этот тетраэдр гомотетичен пирамиде $SABC$ с коэффициентом $x=SH'/SH$ (рис. 20); очевидно, $0<x<1$. Через этот параметр мы и будем выражать объем пересечения.

Плоскости боковых граней пирамиды $S'A'B'C'$ также отсекают от пирамиды $SABC$ тетраэдры — T_A, T_B, T_C, равные между собой и гомотетичные $SABC$ с некоторым коэффициентом y. Выразим y через x. На рисунке 21 изображено сечение наших пирамид плоскостью SAH; она пересекает пирамиды $SABC$.

$S'A'B'C'$ и T_A по треугольникам ASM, $A'S'M'$ и AA_1N. Поскольку $NH:HM = NH:H'M' = S'H:S'H' = x$ (отрезки HM и $H'M'$ симметричны относительно O, $\triangle S'HN \sim \triangle S'H'M'$), а $AH:HM=2$ (H — центр правильного треугольника ABC),

$$y=\frac{AN}{AM}=\frac{AH-NH}{AM}=(2-x)\frac{HM}{AM}=\frac{2-x}{3}.$$

Пересечение пирамиды $SABC$ с $S'A'B'C'$ можно получить, отрезая от нее тетраэдры T_S, T_A, T_B и T_C. Пользуясь этим мы и будем вычислять его объем; надо только учесть, что тетраэдры могут пересекаться друг с другом.

Рассмотрим, например, тетраэдры T_S и T_A. Они пересекаются тогда и только тогда, когда пересекаются их соответственные ребра SS_1 и AA_1 (рисунки 20 и 21), то есть когда выполнено неравенство

$$SA<SS_1+AA_1=xSA+ySA$$

или $x+y>1$; подставляя сюда $y=(2-x)/3$, получим $x>1/2$. При этом условии пересечение тетраэдров T_S и T_A само является тетраэдром, гомотетичным данной пирамиде $SABC$ с коэффициентом $S_1A_1/SA=x+y-1=(2x-1)/3$. То же самое, очевидно справедливо и для пересечений тетраэдра T_S с T_B и T_C. Аналогично, при $2y>1$, то есть при $x<1/2$ пересекаются друг с другом тетраэдры T_A, T_B и T_C. Их попарные пересечения — это тетраэдры, гомотетичные $SABC$ с коэффициентом $2y-1=(1-2x)/3$. Все три тетраэдра при $x>0$ общих точек не имеют, а при $x=0$ такая точка одна — точка H.

Теперь можно выписать выражение для объема $v(x)$

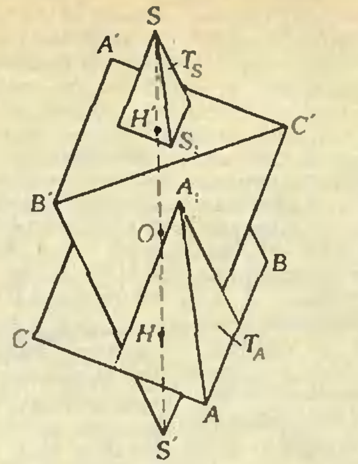


Рис. 20.

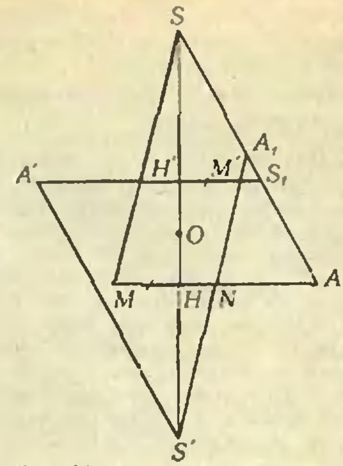


Рис. 21.

пересечения пирамид $SABC$ и $S'A'B'C'$. Объем пирамиды $SABC$ примем за 1, тогда объемы пирамид T_A, T_B и T_C равны $(2-x)^3/27$, пирамиды T_S — x^3, пересечений T_S с остальными пирамидами — $(2x-1)^3/27$, попарных пересечений T_A, T_B и T_C — $(1-2x)^3/27$. Отсюда получаем, что

$$v(x)=v_1(x)=1-x^3-\frac{1}{9}(2-x)^3+\frac{1}{9}(1-2x)^3 \quad \text{при } 0<x<\frac{1}{2},$$

$$v(x)=v_2(x)=1-x^3-\frac{1}{9}(2-x)^3+\frac{1}{9}(2x-1)^3 \quad \text{при } \frac{1}{2}<x<1$$

(из объема всей пирамиды мы вычитаем объемы тетраэдров T_S, T_A, T_B, T_C и добавляем к этой разности объемы их попарных пересечений, так как каждый из этих объемов вычитался дважды). Теперь остается найти производные:

$$v_1'(x)=-3x^2+\frac{1}{3}(2-x)^2-\frac{2}{3}(1-2x)^2,$$

$$v_2'(x)=-3x^2+\frac{1}{3}(2-x)^2+\frac{2}{3}(2x-1)^2,$$

убедиться, что $v_1'(x)>0$ при $0<x<1/2$ и $v_2'(x)<0$ при $1/2<x<1$ (причем $v_1'(1/2)=v_2'(1/2)=0$) и вывести отсюда, что функция $v(x)$ возрастает на отрезке $[0;\ 1/2]$ и убывает на отрезке $[1/2;\ 1]$, следовательно, достигает при $x=1/2$ своего наибольшего значения $v(1/2)=1/2$. Поскольку $OH=OH'=\frac{1-x}{2}SH$, получаем о т в е т: объем рассматриваемого пересечения *пирамид достигает* наибольшего значения, когда точка O делит высоту пирамиды в отношении $SO:OH=3$ (случай 3 на обложке).

В. Н.

«Квант» для младших школьников
(см. «Квант» № 4)

1. Нет. Пусть при делении трехзначного числа *на 11 получается* число $10a+b$. Если $a+b$ меньше 10, то цифрами нашего трехзначного числа будут a, $a+b$ и b, что противоречит убыванию цифр, так как $a+b$ не меньше a, а если $a+b$ больше 10, то цифрами будут $a+1$, $a+b-10$ и b, что противоречит убыванию цифр, так как $a+b-10$ меньше b.
2. *Например, числа* 2, 6 и 5.
3. См. рис. 22.
4. Из первого рисунка следует что сверху лежала либо красная, либо коричневая тетрадь. А тогда из второго — что сверху лежала коричневая тетрадь. Зная, что сверху лежала коричневая тетрадь, из первого рисунка получаем, что второй могла быть красная или синяя тетрадь, а из второго — что ею могла быть только красная или желтая. Отсюда следует, что второй была красная тетрадь. Теперь из второго рисунка следует, что третьей лежала желтая тетрадь, четвертой — серая и пятой — синяя тетрадь.

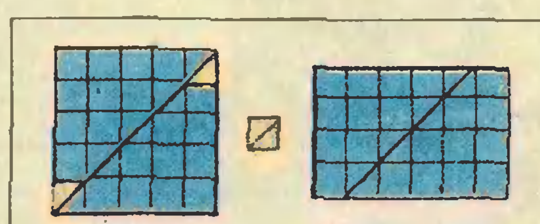


Рис. 22.

5. Провода гудят из-за того, что они колеблются под действием даже небольшого ветра как большие струны.

«Квант» для младших школьников

(см. «Квант» № 5)

1. Из того, что $10a+b$ делится на a, следует, что b делится на a. А из делимости этого числа на b следует, что либо a делится на b, либо $2a$ делится на b, либо $5a$ делится на b. В первом случае $a=b$, что дает числа 11, 22, 33, 44, 55, 66, 77, 88, 99, во втором — это числа 12, 24, 36 и 48, а в третьем — число 15.
2. Юра — москвич, Толя — горьковчанин, Алеша — свердловчанин, Коля — пермяк, Витя — ленинградец.
3. Пусть первые две цифры образуют двузначное число x, а вторые — двузначное число y, тогда по условию $100x+y=x^2+2x\sqrt{y}+y$. Отсюда $x=100-2\sqrt{y}$. Четырехзначное число $100x+y$ тем меньше, чем меньше x, а из выражения x через y следует, что x минимально, когда $y=81$ — максимальному двузначному числу, являющемуся полным квадратом. Отсюда искомое число — 8281.
4. Если бы весь флакон равномерно нагрелся, то все его части равномерно расширились бы. Но стекло — плохой проводник тепла. Поэтому пробка нагреется меньше, чем горлышко, следовательно, она и расширится меньше, в результате чего возникнет зазор между ней и горлышком флакона.
5. а) $264:12=22$ или $264:22=12$; б) $390:13=30$; в) $288=2\cdot 12^2$; г) $10\cdot 1-9=1$; д) $100\cdot 1-99=1$; е) $99+99=198$; ж) $11\cdot 91=1001$; з) $11\cdot 1=9+2$.

Шахматная страничка

(см. «Квант» № 3)

Обе задачи-миниатюры (на доске 7 фигур) принадлежат классику советской шахматной композиции Л. Куббелю.

Задание 5. 1. Фа2! Кр:а8 2. с8Ф×, 1... Кс8 2. d8К×!, 1... Крс6 2. Фd5×, 1... Кс6(b5) 2. с8Ф×.

Задание 6. 1. Фе3! Кра4(b4) 2. Фb3×, 1... Крс4(а5—а4) 2. Ф:с5×, 1... с4 2. Фе8×!

Номер подготовили:
А. Н. Виленкин, В. Н. Дубровский, А. А. Егоров, Б. М. Ивлев, Т. С. Петрова, А. Б. Сосинский, В. А. Тихомирова

Номер оформили:
Ю. М. Аратовский, Е. В. Винодарова, М. Б. Дубах, Т. Н. Кольченко, А. Я. Коршунов, Д. А. Крымов, В. Ф. Лактионов, П. И. Лахтунов, И. Л. Лилье, Ю. П. Мартыненко, Ю. Н. Сафонов, И. Е. Смирнова, Е. К. Темчурина, И. Э. Чудновский
Фото представили
Л. Б. Мелихов, Л. Д. Шварц

Заведующая редакцией Л. В. Чернова

Редактор отдела художественного оформления
Э. А. Смирнов

Художественные редакторы Т. М. Макарова, Е. В. Морозова

Корректор Н. В. Румянцева

103006 Москва К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант», тел. 250-33-54

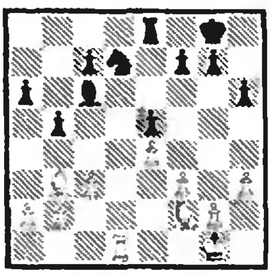
Сдано в набор 17.04.85. Подписано к печати 20.05.85.
Печать офсетная. Усл. кр.-отт. 23,8.
Бумага 70×108 1/16
Усл. печ. л. 5,6. Уч.-изд. л. 7,52. Т-12303.
Тираж 179254 экз. Цена 40 коп. Заказ 1001

Ордена Трудового Красного Знамени
Чеховский полиграфический комбинат
ВО «Союзполиграфпром»
Государственного комитета СССР
по делам издательств, полиграфии
и книжной торговли
г. Чехов Московской области

Консультирует — чемпион мира по шахматам, международный гроссмейстер А. Е. Карпов. Ведет страничку мастер спорта СССР по шахматам, кандидат технических наук Е. Я. Гик.

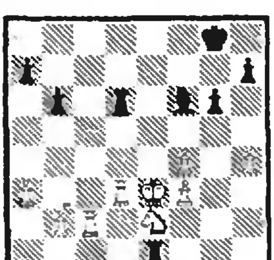
ИНЕРЦИОННОСТЬ МЫШЛЕНИЯ

Каждый шахматист, от перворазрядника до гроссмейстера, может привести множество примеров из своей практики, в которых он допускал просчет, связанный с так называемым «остаточным образом» — фигуры, свои или неприятельские, при расчете варианта оставались на своих местах, в то время как на самом деле они перескакивали на новые. Приведем несколько примеров из работ доктора психологических наук гроссмейстера Н. Крогиуса.



Таль — Крогиус (31-й чемпионат СССР)

Положение черных чуть хуже, но, подтягивая своего короля к центру, они могли создать почти непробиваемую крепость. Однако последовало **26...Kb6? 27. C:b6 cb 28. Лd6!**, и черным впору сдаваться. Ход ладьи оказался для Крогиуса неожиданным. Дело в том, что пешка c7 в его сознании все время держала под контролем пункт d6.



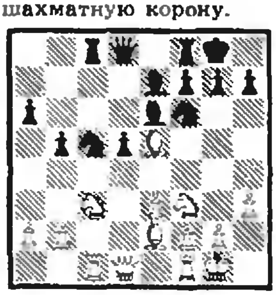
Дарга — Лендьел (Амстердам, 1964 г.)

В этой партии после **40...Лe6+ 41. Kpf2 Лб:e2+** белые сдались. Редчайший случай шахматной слепоты, причем одновременно у обоих партнеров. Гроссмейстеры полагали, что после **42. Л:e2 C:h4+** у белых единственный ответ **43. Kpg2**, не заметив простого **43. Kpe3!** Каждый считал, что поле e3 недоступно королю, выпустив из виду, что ладья e6 к тому моменту уже покинет поле боя. Комбинация с жертвой качества, очевидно, была некорректной.

Созин — Кириллов (Москва, 1931 г.)

В этой старой партии решало **26. Лe1**, и нельзя **26...Лd7 (27. Фg8×)**. Однако было сыграно **26. C:e7?** и ответ **26...Лd7!** спас черных. Только сейчас белые заметили, что **Фg8** уже не мат — остаточный образ.

А вот пример из матча за шахматную корону.



Петросян — Спасский (Москва, 1969 г.)

Положение белых предпочтительнее, но вот что произошло. **14. Cd3? d4! 15. C:d4 K:d3 16. Ф:d3 Cc4 17. Фb1 C:f1.** Черные выиграли качество, а вместе с ним и партию. По поводу грубой ошибки белых, допустивших d5 — d4, гроссмейстер И. Бондаревский писал: «Просмотр, который легко понять с психологической точки зрения. Пункт d4, сильнейший в позиции белых, защищен три раза! Оно, казалось бы, навечно принадлежит им. Именно в таких случаях внимание часто ослабляется».

Что можно посоветовать против подобных тактических просчетов, как бороться с остаточными образами? Можно было бы привести много рецептов, но все они в конечном итоге сводятся к одному, довольно простому — при составлении собственного плана игры нельзя без должного внимания относиться к замыслу противника, даже если на первый взгляд он кажется самым парадоксальным.

В заключение — пример из учебника, знаменитой книги И. Рабиновича «Эндшпиль».

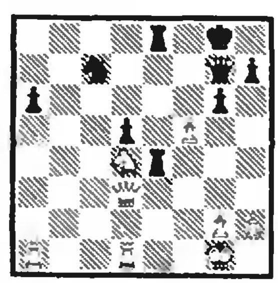
Белые: Kpb4, Kf7, п. g3; черные: Kpd2.

Изучая это положение, автор книги справедливо указывает, что при ходе черных — ничья, а затем приводит выигрыш при ходе белых: **1. Kpc5! Kpe3! 2. Kg5 Kpf2 3. Ke4+ Kpf3 4. Kpd5**, делая вывод: «белым удалось форсировать победу лишь потому, что их король успел защитить коня». Но... простое движение пешки «g» вело к цели, ведь неприятельский король находится вне квадрата. Дальнейший текст комментария диктовался тем же остаточным образом: «Если в начальной позиции король белых стоял бы на линии «a», то выигрыш был бы невозможен даже при ходе белых».

Конкурсные задания

Найдите две комбинации, приводящие к цели.

11. Белые начинают и выигрывают.



12. Черные начинают и выигрывают.

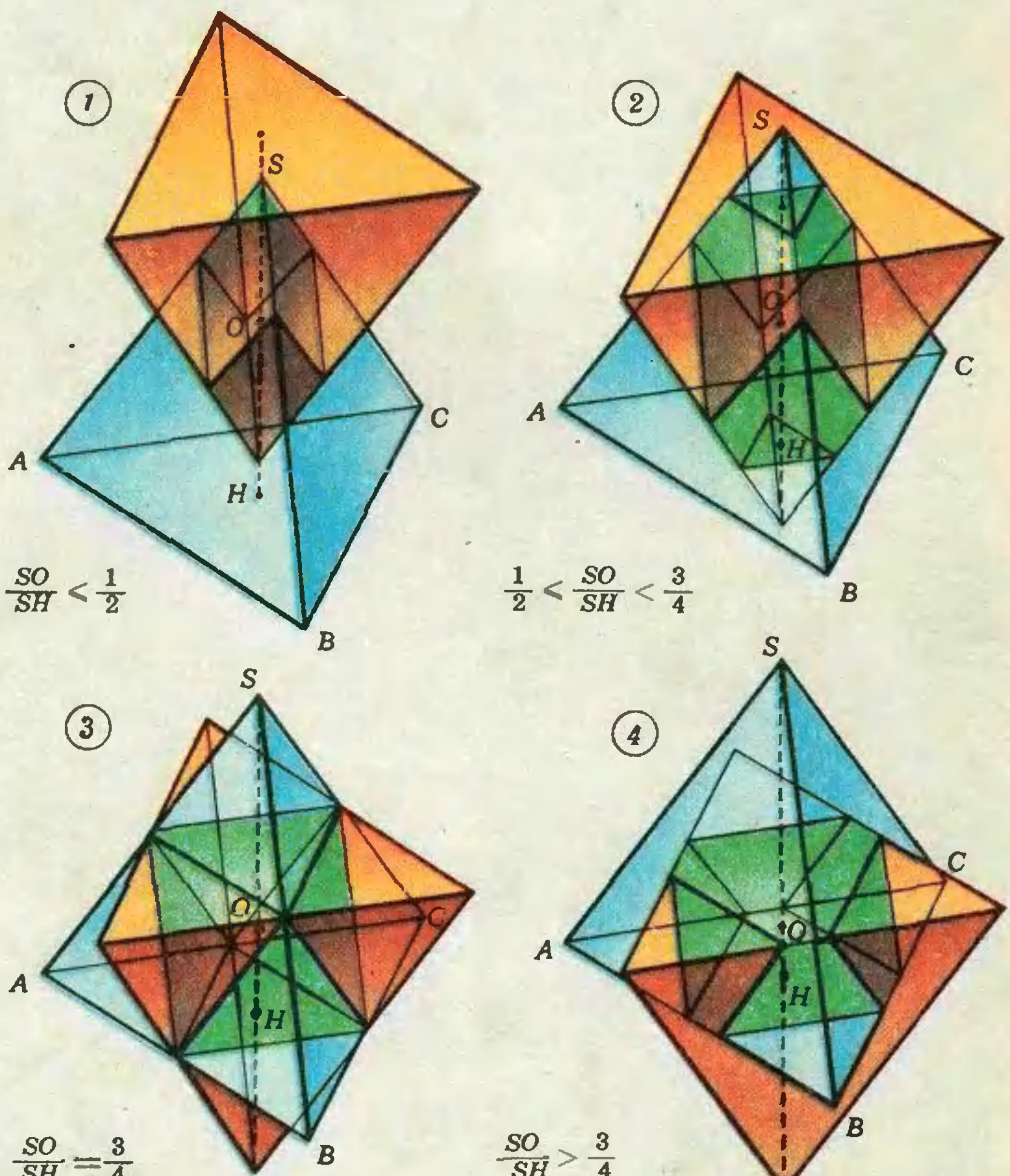
Срок отправки решений — 25 августа 1985 г. (с пометкой на конверте «Шахматный конкурс «Кванта», задания 11, 12»).

Цена 40 коп.

Индекс 70465

В нескольких предыдущих номерах «Кванта» (втором, третьем и пятом) мы отвели 4-ю страницу обложки под чертежи к стереометрическим задачам, призванным помочь читателям развить пространственное воображение. При решении задач эти чертежи играли в основном вспомогательную, иллюстративную роль. В задаче, предлагаемой здесь, четкое представление конфигурации, правильные и точные чертежи составляют, пожалуй, половину решения. Поэтому мы рекомендуем читателям попробовать сначала представить себе эту конфигурацию и нарисовать ее самостоятельно, не глядя на наши чертежи. Полное решение вы найдете в ответах под заголовком «Наша обложка».

З а д а ч а. На высоте правильной треугольной пирамиды, опущенной на ее основание, выбирается произвольная точка O. Вторая пирамида симметрична данной относительно этой точки. При каком положении точки O объем пересечения этих пирамид будет наибольшим?



① $\frac{SO}{SH} < \frac{1}{2}$

② $\frac{1}{2} < \frac{SO}{SH} < \frac{3}{4}$

③ $\frac{SO}{SH} = \frac{3}{4}$

④ $\frac{SO}{SH} > \frac{3}{4}$